Isabelle 2015

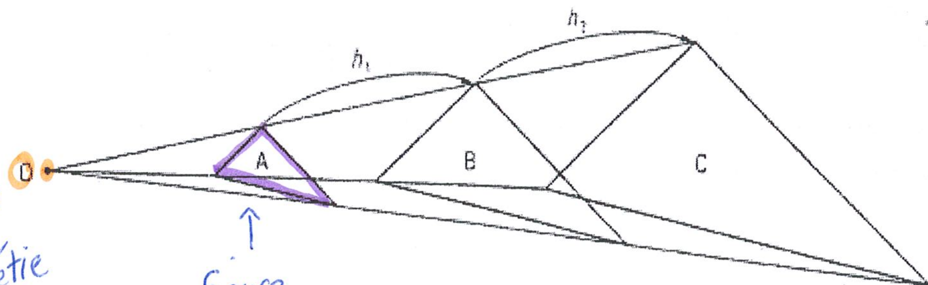
Similitude

Document de travail

Sciences naturelles 4

Exercice sur les propriétés de la relation de similitude.

Dans la figure ci-dessous, ΔB est l'image du ΔA par l'homothétie h_1 de centre O.
ΔC est l'image du ΔB par l'homothétie h_2 de centre O.



centre d'homothétie

figure initiale

p.9 notes de cours

Nommer la propriété de la **relation de similitude** qui s'applique à chacun des cas suivants :

a) $\Delta A \sim \Delta A$ réflexivité

b) si $\Delta A \sim \Delta B$, alors $\Delta B \sim \Delta A$ symétrie

c) si $\Delta B \sim \Delta C$, alors $\Delta C \sim \Delta B$ symétrie

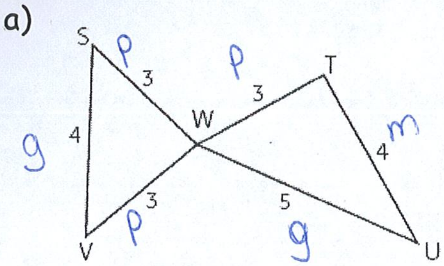
d) $\Delta A \sim \Delta C$ ($\Delta A \sim \Delta B$ et $\Delta B \sim \Delta C$) transitivité

e) $\Delta C \sim \Delta C$ réflexivité

Exercices sur les conditions minimales de similitude.

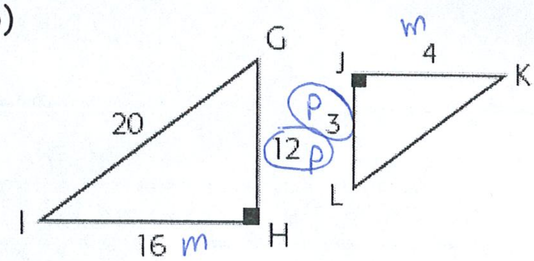
#1 Les paires de triangles suivants sont-elles semblables ? Si oui, indiquer la condition minimale de similitude qui est respectée (**AA, CAC ou CCC**).

a)



R: non

b)

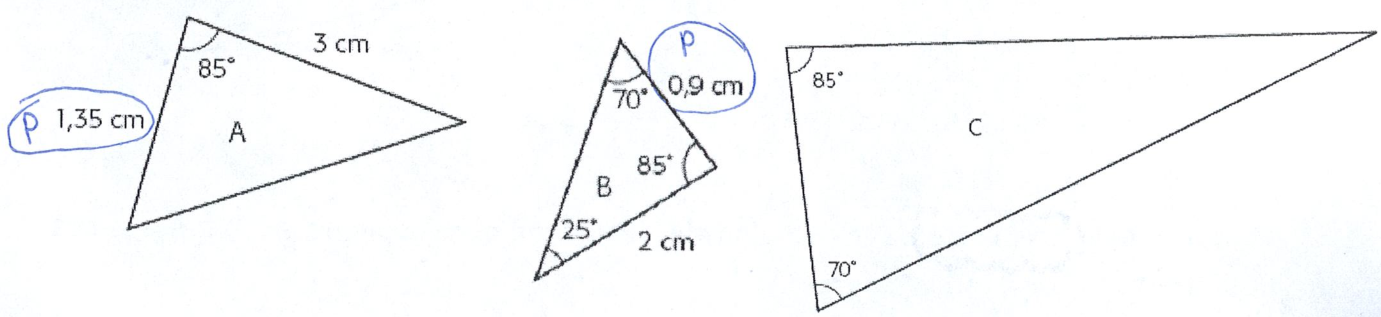


1° $\angle H \cong \angle J$

2° $\frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Rép: oui, CAC

#2 Les triangles **A**, **B** et **C** sont-ils semblables ? Si oui, indiquer la condition minimale de similitude.



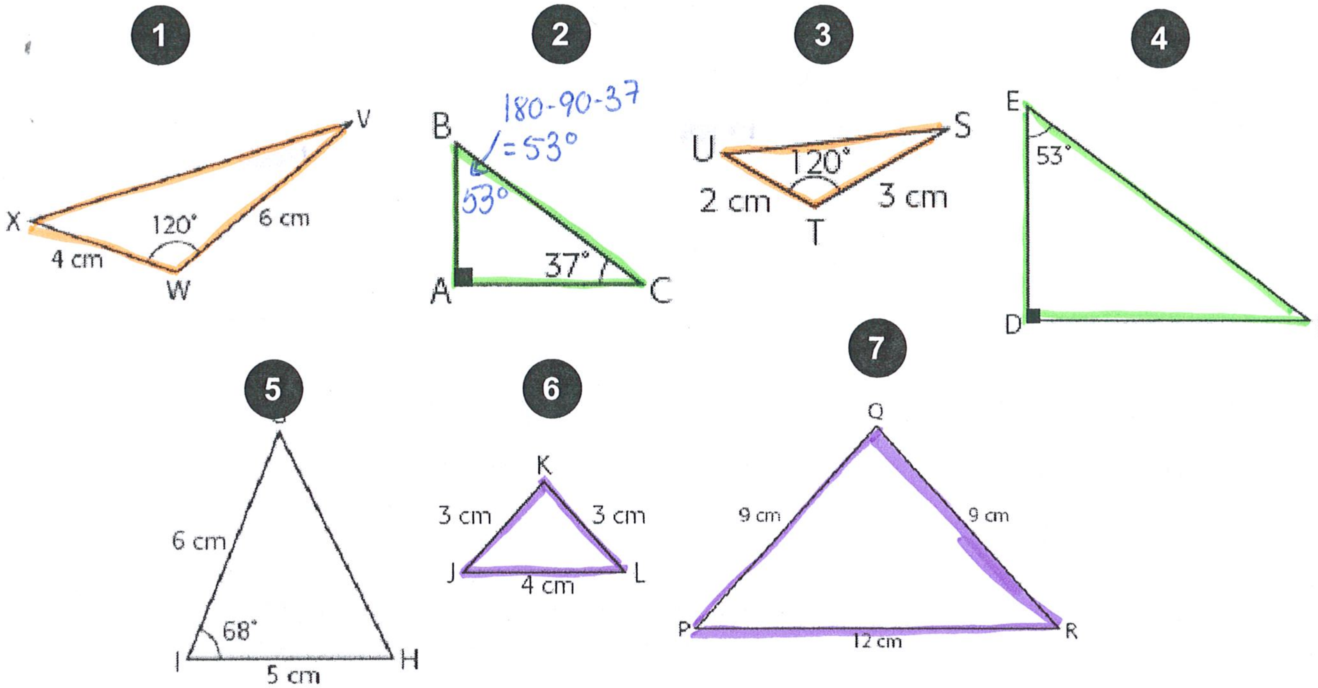
1) $\Delta A \sim \Delta B$ par CAC $\left(\frac{1{,}35}{0{,}9} = \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$

2) $\Delta B \sim \Delta C$ par AA

3) $\Delta A \sim \Delta C$ par transitivité de la relation de similitude

Rép: Oui, ils sont semblables

#3 Indiquer les paires de triangles semblables dans les triangles ci-dessous. De plus indiquer la condition minimale de similitude.



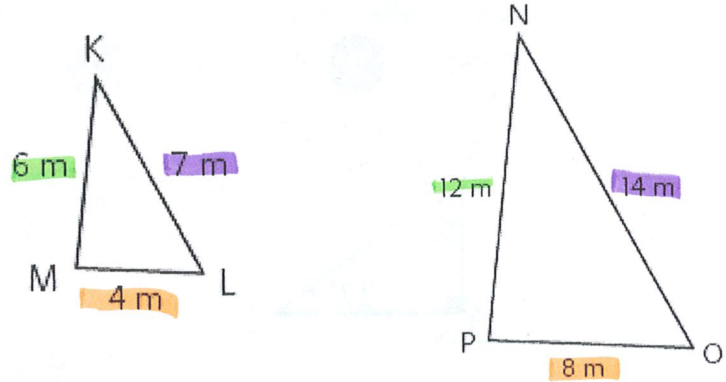
① et ③ par CAC $\left(\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 \right)$

② et ④ par AA

⑥ et ⑦ par CCC $\left(\frac{3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \right)$

#4 Dans la paire de triangles semblables ci-dessous, déterminer le rapport de similitude et indiquer les angles homologues isométriques.

$\frac{8}{4} = \frac{14}{7} = \frac{12}{6} = 2$



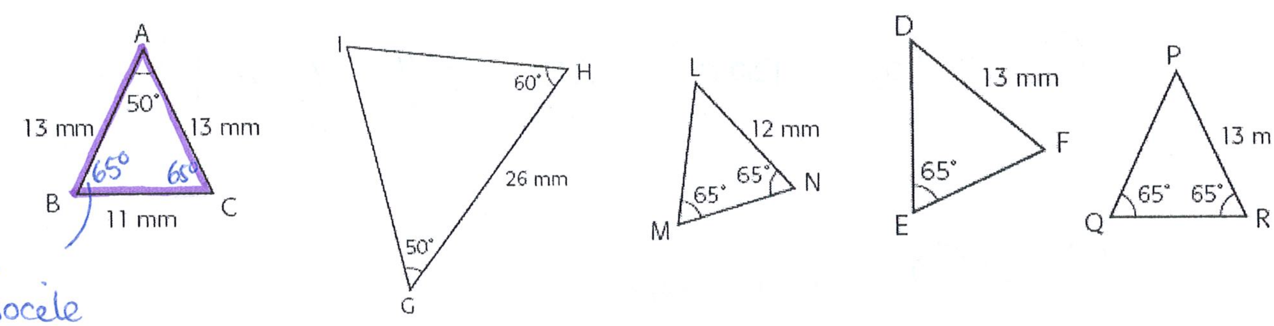
Rép: le rapport de similitude est de 2 (ou ½)

$\angle K$ et $\angle N$

$\angle M$ et $\angle P$

$\angle L$ et $\angle O$

#5 Indiquer les triangles semblables au ΔABC parmi les triangles ci-dessous. De plus, indiquer la condition minimale de similitude qui est respectée.



triangle isocèle

$\frac{180 - 50}{2} = 65°$

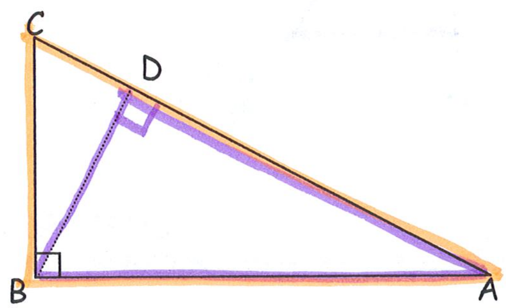
Rép: $\Delta ABC \sim \Delta LMN$ par AA

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ par AA

Exercices sur les preuves de la similitude de triangles semblables.

Dans un triangle rectangle, on abaisse la hauteur relative à l'angle droit.

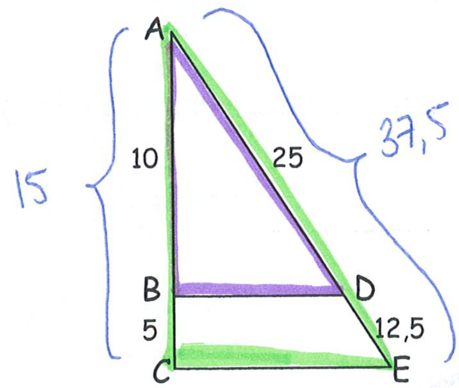
Montrer que $\Delta ABD \sim \Delta ABC$.



AA

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle A \cong \angle A$	par réflexivité de la relation d'isométrie
$\angle ADB \cong \angle ABC$	Le triangle ABC est rectangle en B et la hauteur BD coupe perpendiculairement le segment AC.
$\Delta ADB \sim \Delta ABC$	Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables.

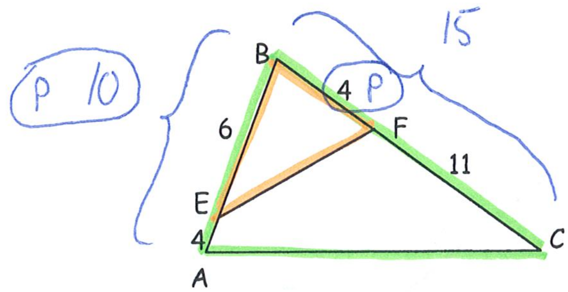
Prouver que le triangle ACE est semblable au triangle ABD.



CAC

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle A \cong \angle A$	Par réflexivité de la relation d'isométrie
$\frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AD}}$	$\frac{15}{10} = \frac{37,5}{25} = \frac{3}{2}$
$\Delta ABD \sim \Delta ACE$	Deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues proportionnels sont semblables.

On a tracé un segment EF de façon à obtenir les mesures indiquées sur la figure.

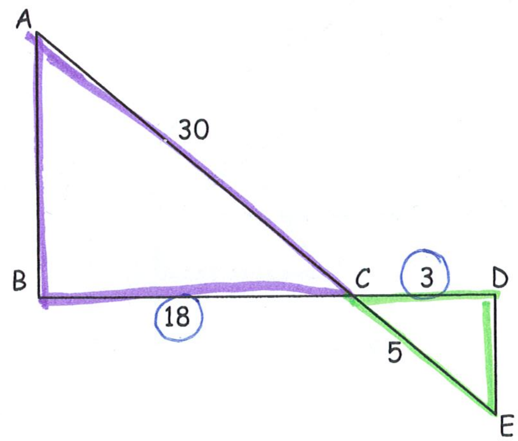


CAC

Montrer que $\Delta ABC \sim \Delta BEF$.

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle B \cong \angle B$	par réflexivité de la relation d'isométrie
$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{FB}} = \dfrac{m\overline{CB}}{m\overline{EB}}$	$\dfrac{10}{4} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$
$\Delta ABC \sim \Delta FEB$	Deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues proportionnels sont semblables

Démontrer que les triangles ABC et CDE sont semblables.

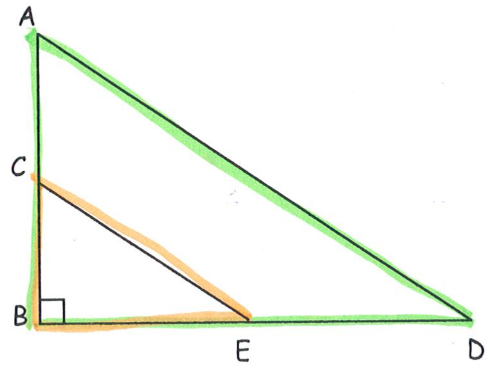


CAC

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle ACB \cong \angle ECD$	Des angles opposés par le sommet sont isométriques.
$\frac{m\overline{BC}}{m\overline{DC}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$	$\frac{18}{3} = \frac{30}{5} = 6$
$\triangle ABC \sim \triangle CDE$	Deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues proportionnels sont semblables.

On joint les milieux de deux côtés d'un triangle ABD par le segment CE.

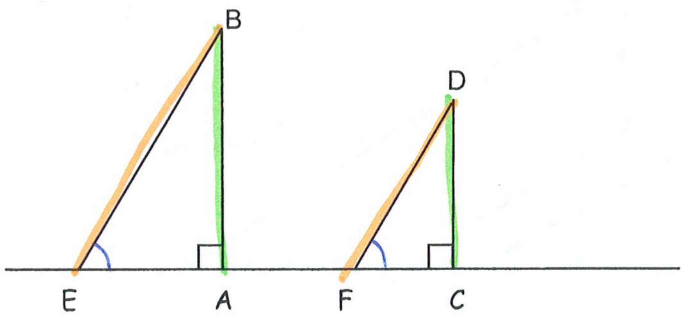
Montrer que $\Delta ABD \sim \Delta CBE$ en utilisant la propriété **CAC** des triangles semblables.



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle B \cong \angle B$	par réflexivité de la relation d'isométrie
$\frac{m\overline{BD}}{m\overline{BE}} = \frac{m\overline{BA}}{m\overline{BC}}$	$\frac{2}{1} = \frac{2}{1}$ Puisque E est le milieu de $\overline{BD}$ et C est le milieu de $\overline{AB}$
$\Delta ABD \sim \Delta CBE$	Deux triangle ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues proportionnels sont semblables.

Deux segments sont perpendiculaires à une droite. Aux extrémités de ces segments, on trace deux segments parallèles entre eux et sécants à la droite.

Démontrer que l'on vient de former des **triangles semblables**.

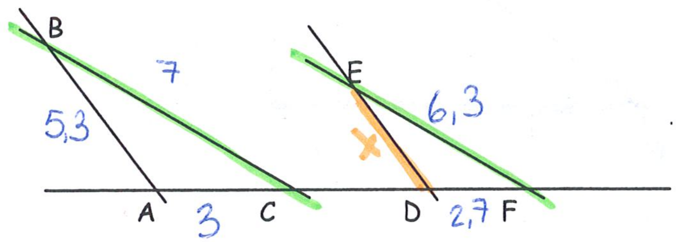


AA

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle EAB \cong \angle FCD$	par hypothèse
$\angle AEB \cong \angle CFD$	Des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques.
$\triangle ABE \sim \triangle CDF$	Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables.

Les droites BC et EF sont parallèles.

Compléter chacune des étapes du raisonnement prouvant que la mesure du segment DE est de 4,77 cm.



$m\overline{AB} = 5{,}3cm$
$m\overline{BC} = 7cm$
$m\overline{AC} = 3cm$
$m\overline{DF} = 2{,}7cm$
$m\overline{EF} = 6{,}3cm$

CAC

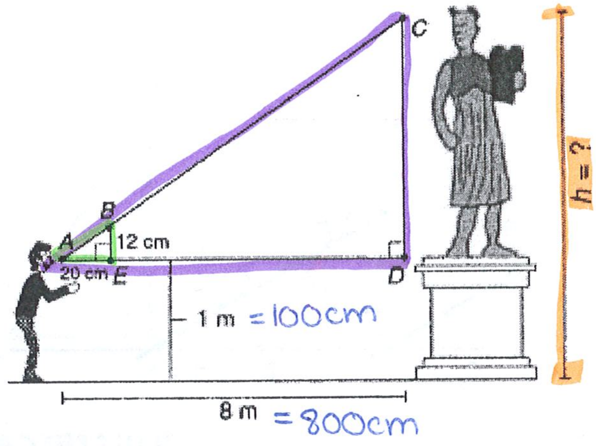
AFFIRMATIONS	**JUSTIFICATIONS**
$\angle ACB \cong \angle DFE$	Des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques.
g/p $\dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	$\dfrac{3}{2{,}7} = \dfrac{7}{6{,}3} \approx 1{,}1111$
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$	Deux triangles ayant un angle isométrique entre deux angles homologues proportionnels sont semblables
$\dfrac{m\overline{DE}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{DF}}{m\overline{AC}}$	Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels

$\dfrac{x}{5{,}3} = \dfrac{2{,}7}{3} \Longrightarrow x = \dfrac{5{,}3 \cdot 2{,}7}{3}$

$x \approx 4{,}8$

Rép: $m\overline{DE} = 4{,}8$ cm

Afin de trouver la hauteur d'une statue, Thomas tient à un mètre du sol un petit bâton de 12 cm situé à 20 cm de ses yeux, comme l'illustre le schéma ci-contre. Trouver la hauteur recherchée.



AA

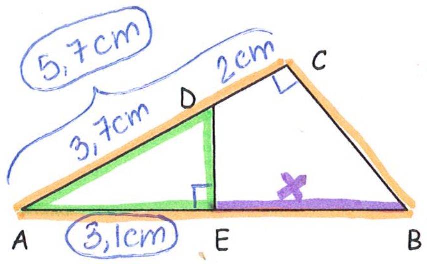
AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle A \cong \angle A$	Par réflexivité de la relation d'isométrie
$\angle AEB \cong \angle ADC$	par hypothèse
$\triangle ABE \sim \triangle ACD$	Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables.
$\dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{AE}} = \dfrac{m\overline{DC}}{m\overline{BE}}$	Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.

$\dfrac{800}{20} = \dfrac{x}{12}$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{800 \cdot 12}{20} = 480$ cm

hauteur = 480 + 100 = 580cm

Rép: La hauteur recherchée est de 580 cm (5,8 m)

Trouver la mesure du segment BE.



$m\angle ACB = 90°$
$m\angle AED = 90°$
$m\overline{AD} = 3{,}7cm$
$m\overline{DC} = 2cm$
$m\overline{AE} = 3{,}1cm$

C'est comme si ces infos étaient sur le dessin.

AA

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle A \cong \angle A$	par réflexivité de la relation d'isométrie
$\angle AED \cong \angle ACB$	par hypothèse
$\Delta AED \sim \Delta ACB$	Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables.
$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AD}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AE}}$	Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.

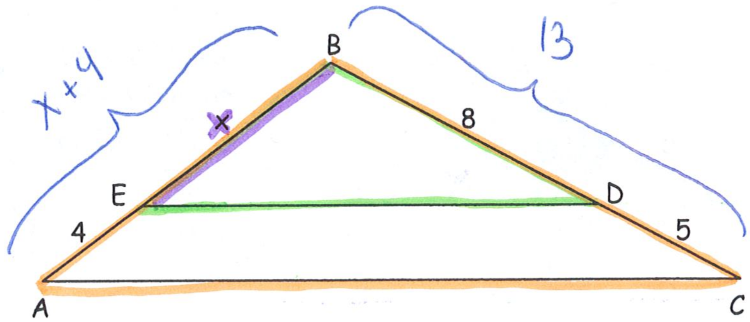
$$\frac{x+3{,}1}{3{,}7} = \frac{5{,}7}{3{,}1} \Longrightarrow x+3{,}1 = \frac{3{,}7 \cdot 5{,}7}{3{,}1}$$

$$x + 3{,}1 = 6{,}8$$
$$-3{,}1 \qquad -3{,}1$$

$$x = 3{,}7cm$$

Rép: $m\overline{EB} = 3{,}7cm$

Déterminer la valeur de **x**, sachant que les segments ED et AC sont des segments parallèles.



AA

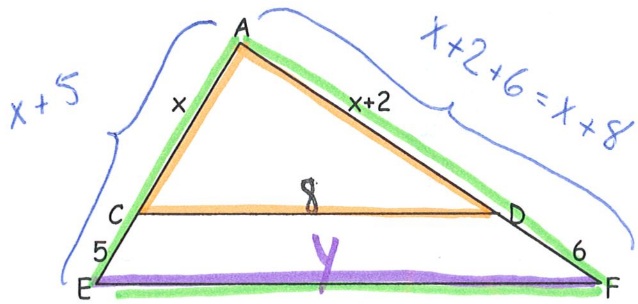
AFFIRMATIONS	**JUSTIFICATIONS**
$\angle B \cong \angle B$	par réflexivité de la relation d'isométrie
$\angle BED \cong \angle BAC$	Des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques.
$\Delta BED \sim \Delta BAC$	Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables.
$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{EB}} = \dfrac{m\overline{CB}}{m\overline{DB}}$	Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.

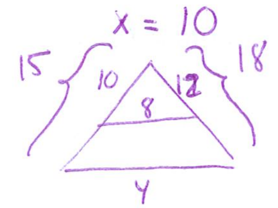
$$\frac{x}{x+4} = \frac{8}{13} \Rightarrow 13x = 8(x+4)$$

$$13x = 8x + 32$$
$$-8x \quad -8x$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{32}{5}$$
$$x = 6,4$$

Rép: $m\overline{BE} = 6,4$ unités

Sachant que les segments CD et EF sont parallèles, déterminer la mesure du segment EF.





AA

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\angle A = m\angle A$	Par réflexivité de la relation d'isométrie
$m\angle ACD \cong m\angle AEF$	Des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques
$\Delta ACD \sim \Delta AEF$	Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables.
$\dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}} = \dfrac{m\overline{AF}}{m\overline{AD}} = \dfrac{m\overline{EF}}{m\overline{CD}}$	Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.

(x) 1° $\dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}} = \dfrac{m\overline{AF}}{m\overline{AD}}$, $\dfrac{x+5}{x} = \dfrac{x+8}{x+2} \Rightarrow$

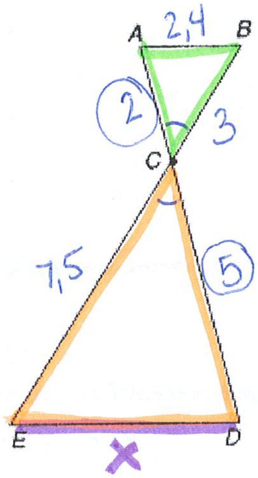
$$(x+2)(x+5) = x(x+8)$$
$$x^2+5x+2x+10 = x^2+8x$$
$$-x^2 \quad -8x \qquad -x^2 \quad -8x$$
$$-x+10 = 0$$
$$\boxed{10 = x}$$

(y) 2° $\dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}} = \dfrac{m\overline{EF}}{m\overline{CD}}$

$\dfrac{15}{10} = \dfrac{y}{8} \Rightarrow y = \dfrac{15 \cdot 8}{10} = 12$

Rép: $m\overline{EF} = 12$ unités

Les segments AC et CD mesurent respectivement 2 cm et 5 cm ; les segments BC et CE, 3 cm et 7,5 cm. Si le segment AB mesure 2,4 cm, quelle est la mesure du segment ED ?



CAC

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle ECD \cong \angle BCA$	Les angles opposés par le sommet sont isometriques
$\frac{m\,\overline{EC}}{m\,\overline{CB}} = \frac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{DC}}$	$\frac{7{,}5}{3} = \frac{5}{2} = 2{,}5$
$\triangle ABC \sim \triangle DEC$	Deux triangles ayant un angle isométrique entre deux côtés homologues proportionnels sont semblables.
$\frac{m\,\overline{DC}}{m\,\overline{AC}} = \frac{m\,\overline{ED}}{m\,\overline{AB}}$	
$\frac{5}{2} = \frac{x}{2{,}4}$	$\Rightarrow$ $x = \frac{5 \cdot 2{,}4}{2}$ $x = 6\text{cm}$

Rep: $m\,\overline{DE} = 6\text{ cm}$

Déterminer la valeur de x + y, sachant :

$m\overline{GF} = 9$

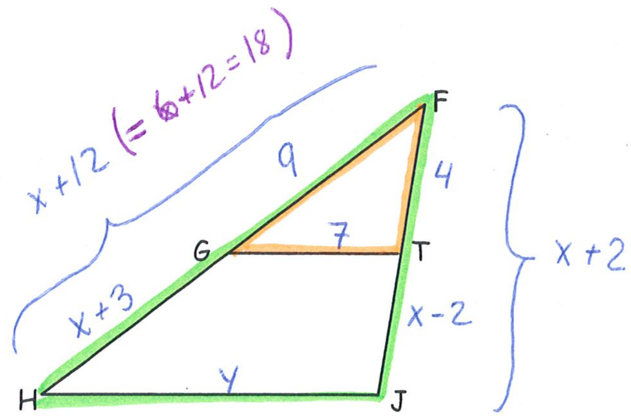
$m\overline{HG} = x + 3$

$m\overline{HJ} = y$ et $\overline{GT} \,//\, \overline{HJ}$

$m\overline{TJ} = x - 2$

$m\overline{GT} = 7$

$m\overline{FT} = 4$



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle F \cong \angle F$	Par réflexivité de la relation d'isometrie
$\angle FGT \cong \angle FHJ$	Des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques.
$\Delta FGT \sim \Delta FHJ$	Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables.
$\dfrac{m\overline{FH}}{m\overline{FG}} = \dfrac{m\overline{FJ}}{m\overline{FT}} = \dfrac{m\overline{JH}}{m\overline{TG}}$	Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.

1° x : $\dfrac{m\overline{FH}}{m\overline{FG}} = \dfrac{m\overline{FJ}}{m\overline{FT}}$

$\dfrac{x+12}{9} = \dfrac{x+2}{4}$

$4(x+12) = 9(x+2)$

$4x + 48 = 9x + 18$

$-4x \quad -18 \quad -4x \quad -18$

$\dfrac{30}{5} = \dfrac{5x}{5}$

$6 = x$

2° y : $\dfrac{m\overline{FH}}{m\overline{FG}} = \dfrac{m\overline{JH}}{m\overline{TG}}$

$\dfrac{18}{9} = \dfrac{y}{7}$

$y = \dfrac{7 \cdot 18}{9}$

$y = 14$

3° $x + y$

$= 6 + 14$

$= 20$

Rép: $x + y = 20u$

Les segments DE et AB sont des segments parallèles.

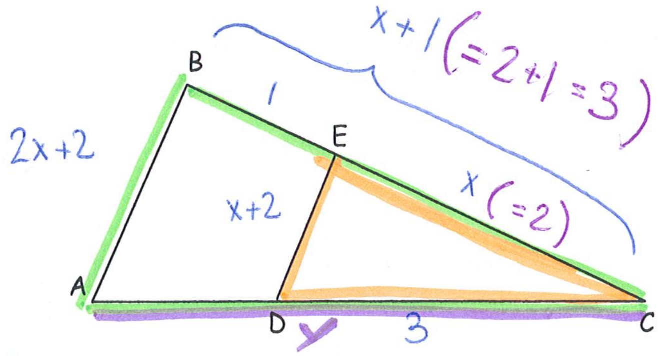
$m\overline{AB} = 2x + 2$

$m\overline{DE} = x + 2$

$m\overline{EC} = x$

$m\overline{BE} = 1$

$m\overline{DC} = 3$



Trouver la mesure du segment AC.

AA

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\angle C \cong \angle C$	par réflexivité de la relation d'isométrie
$\angle CED \cong \angle CBA$	Des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques.
$\triangle CED \sim \triangle CBA$	Deux triangles ayant des angles homologues isométriques sont semblables
$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\_} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DC}}$	Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.

1) x : $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EC}}$

$\dfrac{2x+2}{x+2} = \dfrac{x+1}{x}$

$x(2x+2) = (x+2)(x+1)$

$2x^2 + 2x = x^2 + \underbrace{2x + x} + 2$

$-x^2 - 3x - 2 \quad -x^2 \quad -3x \quad -2$

$x^2 - x - 2 = 0$ $\qquad 1 + -2 = -1$, $1 \times -2 = -2$

$(x+1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x+1 = 0$ ou $x-2 = 0$

$x = -1$ à rejeter $\qquad x = 2$

2) y : $\dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EC}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DC}}$

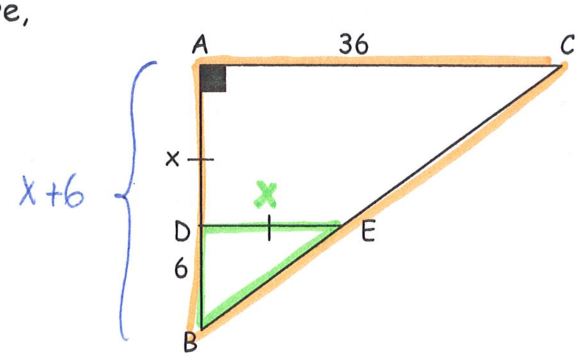
$\dfrac{3}{2} = \dfrac{y}{3}$

$y = \dfrac{3 \cdot 3}{2}$

$y = 4,5$

Rép : $m\overline{AC} = 4,5$ unités

Dans le triangle rectangle ABC ci-contre, on a tracé le segment DE parallèle au segment AC. Calculer le périmètre du triangle BDE au dixième près.

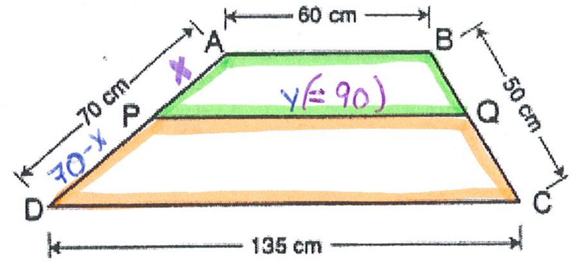


AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\angle B = m\angle B$	Par réflexivité de la relation d'isométrie
$m\angle BDE = m\angle BAC$	Des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques.
$\Delta BDE \sim \Delta BAC$	Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables.
1) $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{BD}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{BE}}$	Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.
$\frac{x+6}{6} = \frac{36}{x} \Rightarrow$	$x(x+6) = 6 \cdot 36$ $x^2 + 6x - 216 = 0$ $(x+18)(x-12) = 0$ $\Rightarrow x+18=0$ ou $x-12=0$ $x = -18$ à rejeter $x = 12$ $\underline{18} + \underline{-12} = -6$ $\underline{18} \cdot \underline{-12} = -216$
2) $m\overline{BE} = \sqrt{(m\overline{BD})^2 + (m\overline{DE})^2}$ $m\overline{BE} = \sqrt{12^2 + 6^2}$ $m\overline{BE} \approx 13{,}4\,u$	Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes.
3) $P = 13{,}4 + 6 + 12$ $P = 31{,}4$ unités	Le périmètre est la somme de tous les côtés.

Dans le trapèze ABCD ci-contre, on trace un segment PQ parallèle aux bases de manière à ce que le trapèze ABQP soit semblable au trapèze PQCD.

Pas besoin de le prouver. On commence après.

Trouver la mesure du segment AP.



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{PQ}}{m\overline{DC}} = \frac{m\overline{AP}}{m\overline{PD}}$	Dans des trapèzes semblables, les côtés homologues sont proportionnels.

1) y : $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{PQ}}{m\overline{DC}}$

$\frac{60}{y} = \frac{y}{135}$

$y^2 = 60 \cdot 135$

$y^2 - 8100 = 0$

$(y-90)(y+90) = 0$

$\Rightarrow y - 90 = 0$ ou $y + 90 = 0$

$y = 90$ $\quad$ $y = -90$ à rejeter

$m\overline{PQ} = 90\text{cm}$

2) x : $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{AP}}{m\overline{PD}}$

$\frac{60}{90} = \frac{x}{70-x}$

$90x = 60(70-x)$

$90x = 4200 - 60x$

$+60x \qquad +60x$

$\frac{150x}{150} = \frac{4200}{150}$

$x = 28$

$m\overline{AP} = 28\text{cm}$

Rép : $m\overline{AP} = 28\text{cm}$

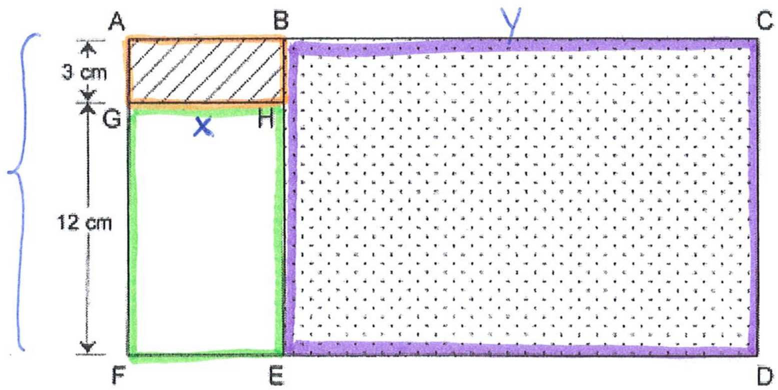
Les rectangles ABHG, BCDE et HEFG illustrés ci-dessous sont semblables.

De plus,

$m\overline{AG} = 3cm$

$m\overline{GF} = 12cm$

$m\overline{BC} > m\overline{BE}$



Quelle est l'aire du rectangle BCDE ?

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
$m\overline{BH} = m\overline{AG} = 3cm$ $m\overline{HE} = m\overline{GF} = 12cm$ $m\overline{BE} = 3 + 12 = 15cm$	Les côtés opposés d'un rectangle sont isométriques.
$\boxed{m\overline{GH}}$ $\frac{m\overline{AG}}{m\overline{GH}} = \frac{m\overline{GH}}{m\overline{GF}}$	Les côtés homologues de rectangles semblables sont proportionnels.
$\frac{3}{x} = \frac{x}{12} \Rightarrow$	$x^2 = 3 \cdot 12$ $x^2 = 36$ $x^2 - 36 = 0$ $(x+6)(x-6) = 0$ $\Rightarrow x+6=0$ ou $x-6=0$ $x = -6$ à rejeter $x = 6$
$\boxed{m\overline{BC}}$ $\frac{m\overline{GH}}{m\overline{BE}} = \frac{m\overline{GF}}{m\overline{BC}}$	Les côtés homologues de rectangles semblables sont proportionnels.
$\frac{6}{15} = \frac{12}{y} \Rightarrow$	$y = \frac{15 \cdot 12}{6} = 30$ cm
$A = m\overline{BC} \cdot m\overline{BE}$ $A = 30 \cdot 15$ $A = 450 cm^2$	Rép : L'aire est de $450 cm^2$.