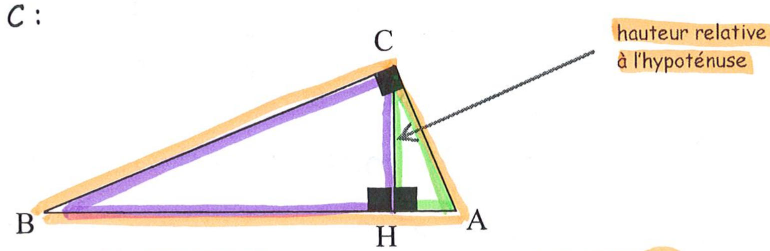
Chapitre 6 : Relations métriques et figures équivalentes

1. Définitions

Relations métriques : Ce sont trois relations qui, en plus de la relation de Pythagore, permettent de trouver des mesures manquantes dans les triangles rectangles.

Il est possible de montrer que dans tout triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine deux triangles semblables au triangle ABC, d'où découlent les trois relations métriques.

Soit le triangle ABC rectangle en C :



Hauteur relative à l'hypoténuse ($\overline{CH}$): Dans un triangle rectangle, c'est la hauteur issue de l'angle droit.

Preuve pas à l'examen du chapitre 6

Montrons que les trois triangles sont semblables :

- $\Delta ABC \sim \Delta ACH$
  - $\angle A \cong \angle A$ Par réflexivité de la relation d'isométrie.
  - $\angle ACB \cong \angle AHC$ Par hypothèse (où $\overline{CH}$ est une hauteur...)
  - $\Delta ABC \sim \Delta ACH$ Par AA (Phrase)

- $\Delta ABC \sim \Delta CBH$
  - $\angle B \cong \angle B$ Par réflexivité de la relation d'isométrie
  - $\angle ACB \cong \angle CHB$ Par hypothèse
  - $\Delta ABC \sim \Delta CBH$ par AA (Phrase)

- Par la transitivité de la relation de similitude, $\Delta ACH \sim \Delta CBH$.
- **Donc, $\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta CBH$.** Les 3 relations métriques découlent de la similitude des 3 triangles.

Moyenne proportionnelle : nombre obtenu en prenant la racine carrée du produit de deux nombres.

Exemple : Pour 4 et 9, la moyenne proportionnelle est 6 car $6 = \sqrt{4 \cdot 9}$
$6 = \sqrt{36}$

Ainsi, dans une proportion, lorsque les 2 extrêmes ou les 2 moyens ont la même valeur, cette valeur est dite moyenne proportionnelle.

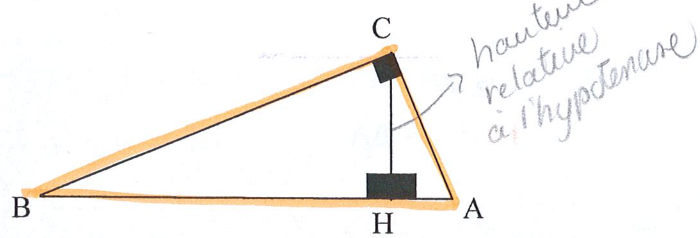
Exemple : $\frac{4}{10} = \frac{10}{25} \Rightarrow 10^2 = 4 \cdot 25$
$10 = \sqrt{100}$

Donc 10 est la moyenne proportionnelle de 4 et 25.

En général, si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$,

on dit que b est la moyenne proportionnelle de a et c.

Soit le triangle rectangle suivant :



$\overline{AB}$: hypoténuse

$\overline{BC}$: grande cathète

$\overline{AC}$: petite cathète

$\overline{CH}$: hauteur relative à l'hypoténuse

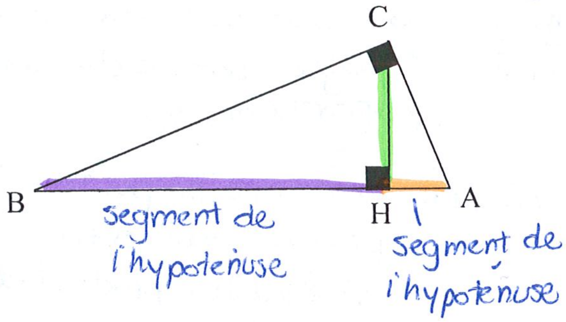
$\overline{BH}$: projection sur l'hypoténuse de la cathète $\overline{BC}$ ou segment de l'hypoténuse

$\overline{AH}$: projection sur l'hypoténuse de la cathète $\overline{AC}$ ou segment de l'hypoténuse

déterminés par la hauteur relative à l'hypoténuse.

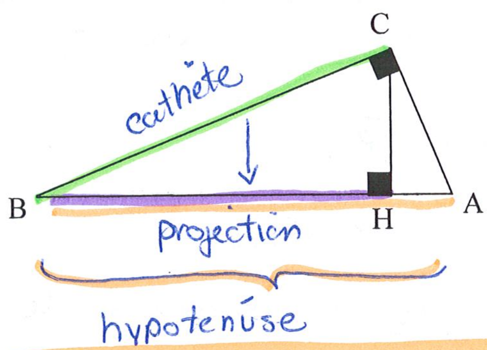
2. Les relations métriques

Relation 1 : Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.



$$\frac{m\overline{CH}}{m\overline{BH}} = \frac{m\overline{AH}}{m\overline{CH}}$$

Relation 2 : Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque cathète est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.



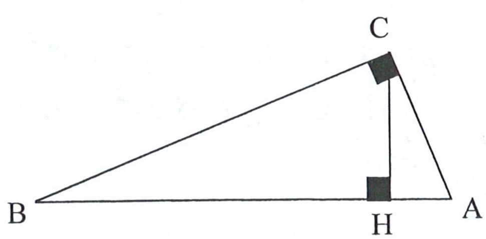
Avec $\overline{CB}$:

$$\frac{m\overline{BC}}{m\overline{BH}} = \frac{m\overline{BA}}{m\overline{BC}}$$

Avec $\overline{CA}$

$$\frac{m\overline{AC}}{m\overline{AH}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$$

Relation 3 : Dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égal au produit de l'hypoténuse et de sa hauteur relative.



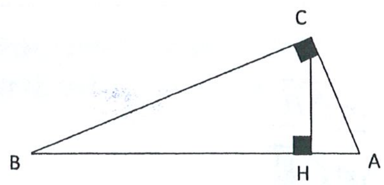
$$m\overline{BC} \cdot m\overline{CA} = m\overline{AB} \cdot m\overline{CH}$$

Pas à l'examen.

Démonstrations :

Relation 1 : Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Soit



$\Delta CBH \sim \Delta CAH$ voir p. 1

$\dfrac{m\overline{CH}}{m\overline{AH}} = \dfrac{m\overline{BH}}{m\overline{CH}}$ Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.

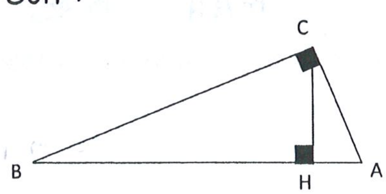
$(m\overline{CH})^2 = m\overline{AH} \cdot m\overline{BH}$ (Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.)

$m\overline{CH} = \sqrt{m\overline{AH} \cdot m\overline{BH}}$

Donc la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle de $m\overline{AH}$ et $m\overline{BH}$.

Relation 2 : Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque cathète est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.

Soit :



Pour la cathète $\overline{CB}$:

$\Delta CBH \sim \Delta ABC$ voir p. 1

$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{CB}} = \dfrac{m\overline{CB}}{m\overline{BH}}$ Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.

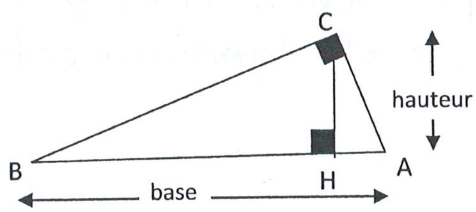
$(m\overline{CB})^2 = m\overline{AB} \cdot m\overline{BH}$ (Dans une proportion, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.)

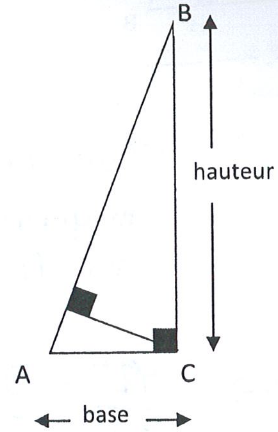
$m\overline{CB} = \sqrt{m\overline{AB} \cdot m\overline{BH}}$

Donc la cathète $\overline{CB}$ est moyenne proportionnelle de $\underset{\uparrow \text{ hyp.}}{m\overline{AB}}$ et $\underset{\uparrow \text{ projection}}{m\overline{BH}}$

Relation 3 : Dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égal au produit de l'hypoténuse et de sa hauteur relative.

Calculons l'aire du triangle rectangle ABC de deux façons différentes :





$A = \frac{m\overline{AB} \cdot m\overline{CH}}{2}$

$A = \frac{m\overline{AC} \cdot m\overline{BC}}{2}$

Ainsi, par **transitivité de la relation d'égalité**, on a :

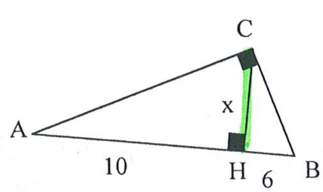
$\cancel{2} \cdot \frac{m\overline{AB} \cdot m\overline{CH}}{\cancel{2}} = \frac{m\overline{AC} \cdot m\overline{BC}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}$

Donc : $m\overline{AB} \cdot m\overline{CH} = m\overline{AC} \cdot m\overline{BC}$

Exemples : Déterminer la mesure manquante dans chacun des triangles suivants. **Justifier les étapes de ta démarche.**

cherche : hauteur rel. $\Rightarrow$ Rel #1
connaît : 2 segments de l'hyp.

a)



$\frac{m\overline{CH}}{m\overline{BH}} = \frac{m\overline{AH}}{m\overline{CH}}$

Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$\frac{x}{6} = \frac{10}{x} \Rightarrow x^2 = 6 \cdot 10$

$x = \pm\sqrt{60}$

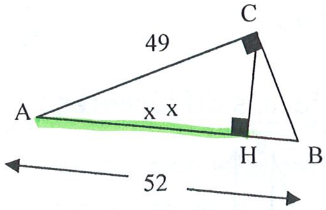
$x_1 = -\sqrt{60}$ et $x_2 = \sqrt{60}$

à rejeter

Rép : $m\overline{CH} = \sqrt{60}$ ou $m\overline{CH} \approx 7,75$

Cherche : projection
Connaît : cathète et hyp. $\Rightarrow$ rel #2.

b)



$$\frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AH}}{m\overline{AC}}$$

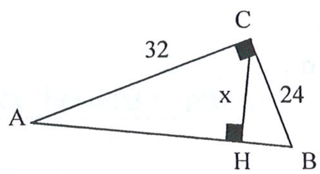
Dans un triangle rectangle, chaque cathète est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.

$$\frac{49}{52} = \frac{x}{49} \Rightarrow x = \frac{49 \cdot 49}{52}$$

$$x \approx 46,17$$

Rep: $m\overline{AH} \approx 46,17$

c)



2 cotés $\Rightarrow$ 3 cotés (Pyth.)
cherche : hauteur relative
connaît : 2 cathètes hyp $\Rightarrow$ rel #3

$$m\overline{AB} = \sqrt{(m\overline{AC})^2 + (m\overline{BC})^2}$$
$$m\overline{AB} = \sqrt{32^2 + 24^2}$$
$$m\overline{AB} = 40$$

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse au carré est égale à la somme des carrés des cathètes.

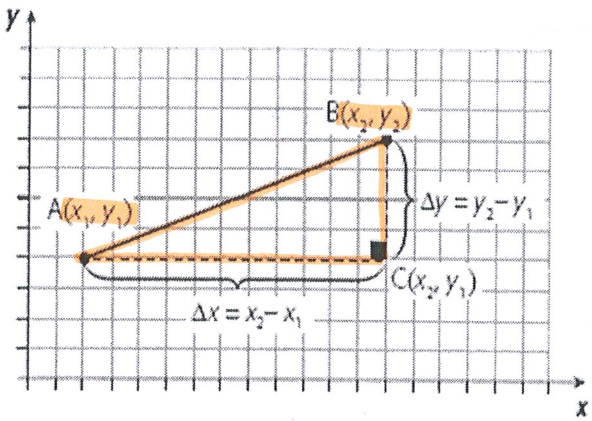
$$m\overline{AB} \cdot m\overline{CH} = m\overline{AC} \cdot m\overline{CB}$$
$$\frac{40 \cdot m\overline{CH}}{40} = \frac{32 \cdot 24}{40}$$
$$m\overline{CH} = 19,2$$

Dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égal au produit de l'hypoténuse et de sa hauteur relative.

Rép : $m\overline{CH} = 19,2$

3. La distance entre deux points

La distance entre deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ dans un plan cartésien, notée d(**A**, **B**), est la longueur du segment **AB**. À partir de l'accroissement des abscisses (Δx) et de l'accroissement des ordonnées (Δy) entre ces deux points, on utilise la **relation de Pythagore** pour calculer d(**A**, **B**).



La distance entre deux points est nécessairement un nombre positif.

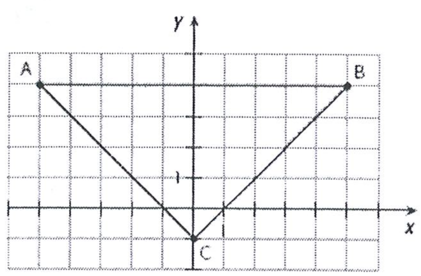
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

où

$$m\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Exemples :

1. Déterminer le périmètre du triangle isocèle ci-dessous :



A(−5, 4)

B(5, 4)

C(0, −1)

① $m\overline{AB} = |5 - 5|$

$mAB = 10u$

ou

$m\overline{AB} = |-5-5|$

$m\overline{AB} = |-10|$

$m\overline{AB} = 10$

② $m\overline{AC} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$m\overline{AC} = \sqrt{(0 - 5)^2 + (-1-4)^2}$

$m\overline{AC} = \sqrt{50}\ u$

③ $m\overline{BC} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$m\overline{BC} = \sqrt{(0-5)^2 + (-1-4)^2}$

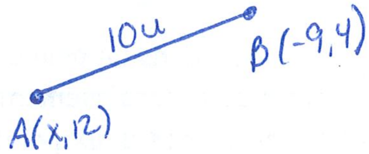
$m\overline{BC} = \sqrt{50}\ u$

④ $P = 10 + 2\sqrt{50}\ u$

$P \approx 24{,}14u$

Rép: Le périmètre est d'environ 24,14u.

2. Trouver les coordonnées possibles du point **A(x, 12)**, si la distance entre le point A et le point B est 10 unités et les coordonnées de B sont (-9, 4).



$$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

$$10^2 = \left(\sqrt{(-9-x)^2 + (4-12)^2}\right)^2$$

binôme carré = trinôme

$$100 = (-9-x)^2 + 64$$

$$\underset{-100}{100} = 81 + 18x + x^2 + 64 \quad -100$$

$$0 = x^2 + 18x + 45$$

factoriser
ou
formule quadratique

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$3+15 = 18$
$3 \times 15 = 45$

$$0 = (x+3)(x+15)$$

$$\Rightarrow x+3 = 0 \quad \text{ou} \quad x+15 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = -15$$

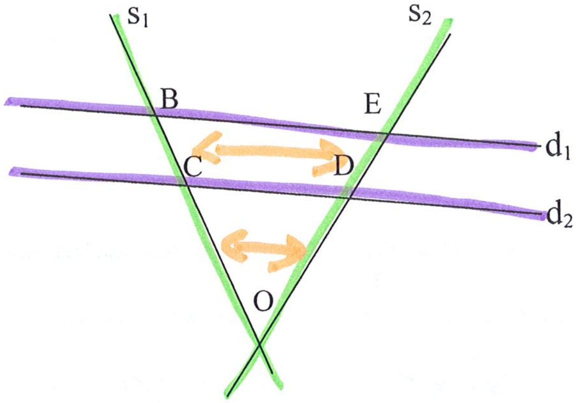
Rép: Les coordonnées possibles du point A sont (-3, 12) et (-15, 12)

4. Énoncés en géométrie

Énoncé 1 : Des droites sécantes, coupées par des parallèles, sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.

preuve – pas à l'examen

Démonstration :



Hypothèse : $d_1 // d_2$
$S_1 \not\parallel S_2$

Montrer que :

$$\frac{m\overline{BC}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{CO}}{m\overline{DO}} = \frac{m\overline{BO}}{m\overline{EO}}$$

Montrer que $\Delta BOE \sim \Delta COD$

$\angle EBO \cong \angle DCO$ car, des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques

$\angle BEO \cong \angle CDO$ car, des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante sont isométriques.

D'où $\Delta BOE \sim \Delta COD$ car, deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont semblables.

Alors

$$\frac{m\overline{BO}}{m\overline{CO}} = \frac{m\overline{EO}}{m\overline{DO}}$$

car, les côtés homologues de deux triangles semblables sont proportionnels

De plus

$$\frac{m\overline{BO}}{m\overline{EO}} = \frac{m\overline{CO}}{m\overline{DO}}$$

car, dans une proportion, on peut intervertir les moyens pour obtenir une nouvelle proportion.

Et

$$\boxed{\frac{m\overline{BO}}{m\overline{EO}} = \frac{m\overline{CO}}{m\overline{DO}}} = \frac{m\overline{BO} - m\overline{CO}}{m\overline{EO} - m\overline{DO}} = \boxed{\frac{m\overline{BC}}{m\overline{ED}}}$$

procédure additive des proportions

← pas un côté de triangle

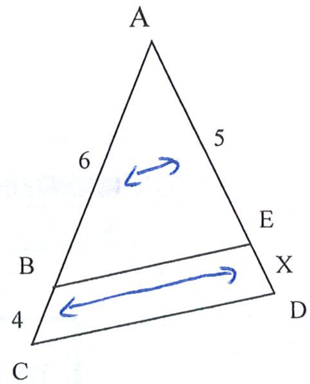
Donc

$$\frac{m\overline{BO}}{m\overline{EO}} = \frac{m\overline{CO}}{m\overline{DO}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{ED}}$$

par transitivité de la relation d'égalité

Exemples :

1. *Soit $\overline{BE} \,//\, \overline{CD}$, trouver $m\overline{DE}$ et justifier.*



C'est plus long mais on peut aussi utiliser le cas de similitude AA où le théorème de Thales.

Affirmations	Justifications
$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AE}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{ED}}$	Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.

$\dfrac{6}{5} = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x = \dfrac{4 \cdot 5}{6}$

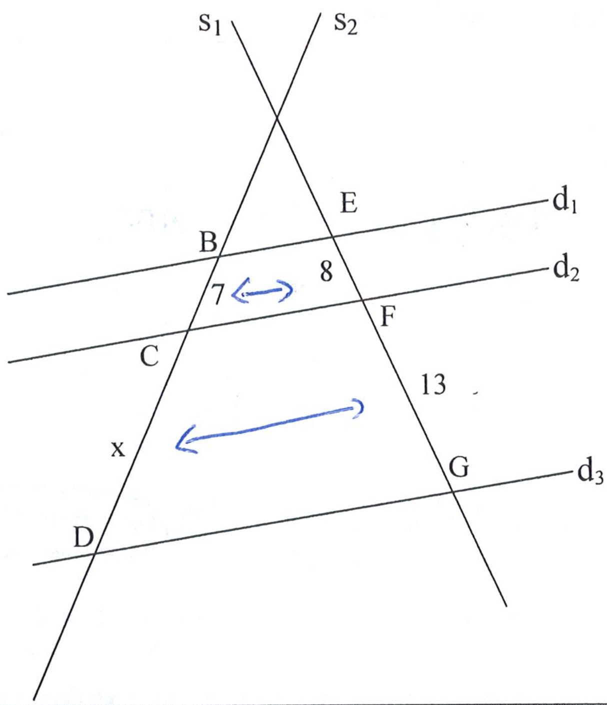
$x = 3{,}33$

Rep: $m\overline{ED} \approx 3{,}33$

Impossible d'utiliser le cas de similitude AA.

*

2. Soit $d_1 // d_2 // d_3$, trouver la valeur manquante.



Affirmations	Justifications
$\dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \dfrac{m\overline{CD}}{m\overline{FG}}$	Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.

$\dfrac{7}{8} = \dfrac{x}{13} \Rightarrow x = \dfrac{7 \cdot 13}{8}$

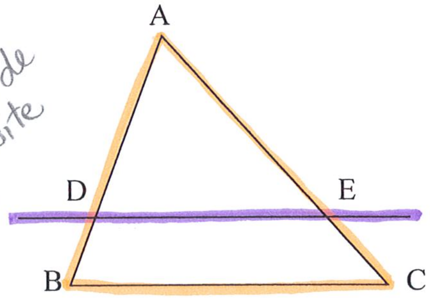
$x = 11,38$

Rép : $m\overline{CD} = 11,38$

Remarque 1 : À utiliser lorsqu'on utilise les côtés parallèles.
Remarque 2 : Cette phrase remplace AA.
Remarque 3 : On dit que les Δ sont semblables, alors on fait la proportion avec les côtés homologues

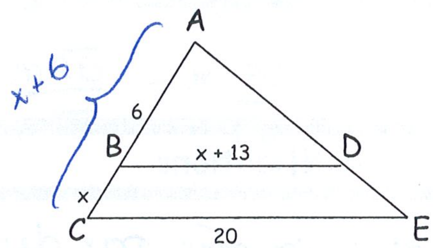
Énoncé 2 : Toute droite sécante à deux côtés d'un triangle et parallèle au troisième côté forme des triangles semblables.

On parle de cette droite



Si DE // BC, alors Δ ADE ~ Δ ABC

Exemple : Soit la figure ci-dessous où les segments BD et CE sont parallèles. Trouver la mesure du segment AC.



Affirmations	Justifications
Δ ABC ~ Δ ADE	Toute droite sécante à deux côtés d'un triangle et parallèle au troisième forme des triangles semblables.
$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \frac{m\overline{BD}}{m\overline{CE}}$	Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels.
$\frac{6}{x+6} = \frac{x+13}{20}$	$\Rightarrow$ $(x+6)(x+13) = 6 \cdot 20$

$x^2 + 6x + 13x + 78 = 120$
$-120 \quad -120$
$x^2 + 19x - 42 = 0$

$-2 + 21 = 19$
$-2 \times 21 = -42$

$(x-2)(x+21) = 0$
$\Rightarrow x - 2 = 0$ ou $x + 21 = 0$
$x = 2$ ou $x = -21$
à rejeter

Rép : $m\overline{AC} = 2 + 6 = 8$

5. Propriétés des figures planes et des solides

A) Rappels

Isométries : Transformations qui conservent les distances entre deux figures.

Rotation, Réflexion, Translation

Similitudes : Transformation qui est le résultat d'une isométrie et d'une homothétie.

Par une similitude, l'une des figures est un **agrandissement**, une **réduction** ou une **reproduction exacte de l'autre.**

Figures et solides isométriques : Des figures ou des solides sont isométriques si :

- les côtés homologues sont isométriques
- les angles homologues sont isométriques

Figures et solides semblables : Des figures ou des solides sont semblables si :

- les côtés homologues sont proportionnels
- les angles homologues sont isométriques

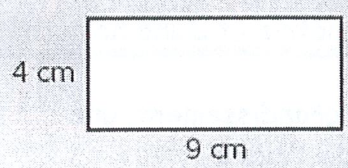
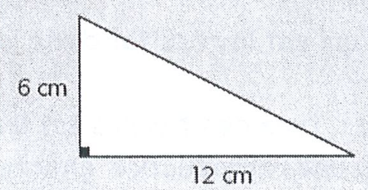
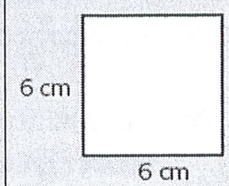
Rapport de similitude (K) : Rapport entre les mesures de segments homologues de figures ou solides semblables.

- $K = \frac{\text{mesure grand}}{\text{mesure homologue petit}}$ ou $K = \frac{\text{mesure petit}}{\text{mesure homologue du grand}}$

- Le rapport entre les mesures d'angles homologues est 1.
- Des figures ou des solides dont le rapport de similitude est 1, sont dits isométriques.

B) Figures équivalentes et solides équivalents

Deux dimensions : Deux figures sont équivalentes si elles ont la même aire.

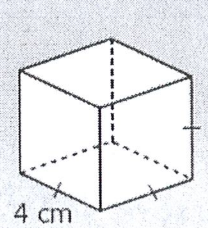
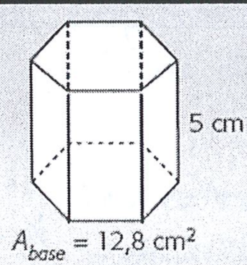
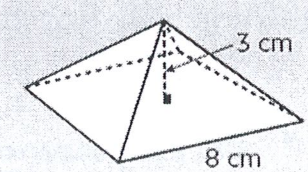
Rectangle	Triangle rectangle	Carré
		
$A_{rectangle} = b \cdot h$ $A_{rectangle} = 9 \cdot 4$ $A_{rectangle} = 36 cm^2$	$A_{triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$ $A_{triangle} = \frac{12 \cdot 6}{2}$ $A_{triangle} = 36 cm^2$	$A_{carré} = C^2$ $A_{carré} = 6^2$ $A_{carré} = 36 cm^2$

$A_{\square} = A_{\triangle} = A_{\square}$ donc les trois figures sont équivalentes.

Trois dimensions : Deux solides sont équivalents s'ils ont le même volume.

Pièges et astuces

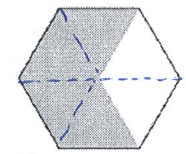
Il ne faut pas comparer l'aire des faces de deux solides pour déterminer s'ils sont équivalents.

Cube	Prisme droit	Pyramide à base carré
	 $A_{base} = 12{,}8\ cm^2$	
$V_{cube} = C^3$ $V_{cube} = 4^3$ $V_{cube} = 64 cm^3$	$V_{prisme} = A_{base} \cdot h$ $V_{prisme} = 12{,}8 \cdot 5$ $V_{prisme} = 64 cm^3$	$V_{pyramide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$ $V_{pyramide} = \frac{8^2 \cdot 3}{3}$ $V_{pyramide} = 64 cm^3$

$V_{cube} = V_{prisme} = V_{pyramide}$ donc les 3 solides sont équivalents.

Exemples :

1. L'aire de la partie ombrée de l'hexagone régulier ci-contre est de 25 cm^2. Déterminer la mesure de la diagonale d'un carré équivalent à cet hexagone.



1) Partie ombrée = $\frac{2}{3}$ hexagone

$$\frac{2}{3} = \frac{25cm^2}{A_h}$$

$$A_{hexagone} = \frac{3 \cdot 25}{2}$$

$$A_{hexagone} = 37,5cm^2$$

2) Dimension du carré

$$A_{\square} = 37,5cm^2$$ car il est équivalent à l'hexagone

$$A = c^2$$

$$\sqrt{37,5} = \sqrt{c^2}$$

$$6,12cm \approx c$$

3) Diagonale du carré

6,12 ; 6,12

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = \sqrt{37,5}^2 + \sqrt{37,5}^2$$

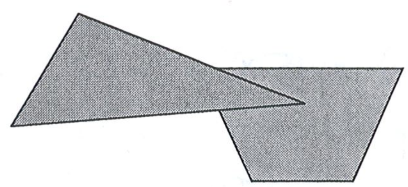
$$\sqrt{c^2} = \sqrt{75}\ cm$$

$$c \approx 8,66cm$$

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes

Rép : La diagonale mesure $\sqrt{75}$ cm ou environ 8,66cm

2. Sachant que le triangle et le trapèze sont équivalents, déterminer des mesures entières possibles pour chacune des bases du trapèze, si la base du triangle mesure 7 cm et que la hauteur des deux polygones est la même.



$A_{\triangle} = A_{\text{trapèze}}$ car ils sont équivalents

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{(B+b)h}{2}$$

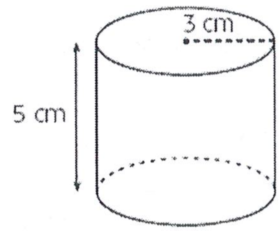
$$2 \cdot \frac{7h}{2} = \frac{(B+b)h}{2} \cdot 2$$

$$\frac{7h}{h} = \frac{(B+b) \cdot h}{h}$$ (car les deux hauteur sont les mêmes)

$$7 = B + b$$

Rép : B=6cm et b=1cm ou B=5cm et b=2cm ou B=4cm et b=3cm

3. Soit le cylindre ci-contre. Déterminer la mesure du rayon d'une boule qui lui est équivalentes.



1) Cylindre

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5$

$V = 45\pi \text{ cm}^3$

2) $V_{boule} = V_{cylindre}$ car ils sont équivalents

$V_{boule} = 45\pi \text{ cm}^3$

3) rayon boule

$$V = \frac{\pi r^3}{3}$$

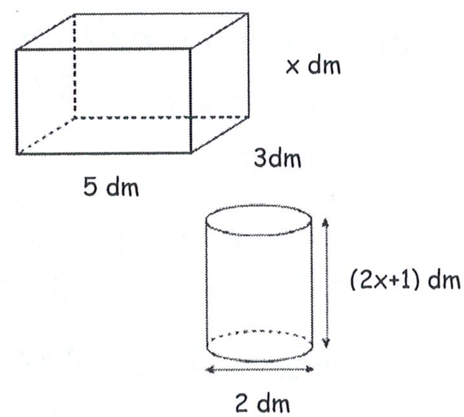
$$3 \cdot 45\pi = \frac{\pi r^3}{3} \cdot 3$$

$$\frac{135\pi}{\pi} = \frac{\pi r^3}{\pi} \Rightarrow r^3 = 135$$

$$r = \sqrt[3]{135} \approx 5{,}13 \text{ cm}$$

Rép: Le rayon de la boule est de $\sqrt[3]{135}$ cm³ ou d'environ 5,13cm.

4. Dans le cadre de son cours de sciences, Thomas doit transvider le contenu d'un bocal cylindrique, qui est rempli à moitié, dans un autre bocal en forme de prisme. Les deux bocaux sont équivalents. Déterminer la quantité de liquide, en millilitres, contenue dans le bocal cylindrique.



r=1dm

1) $V_{cylindre} = V_{prisme}$ car ils sont équivalents

$\pi r^2 h = Ab \cdot h$

$\pi \cdot 1^2 \cdot (2x+1) = 5 \cdot 3 \cdot x$

$\pi(2x+1) = 15x$

$2\pi x + \pi = 15x$

$-2\pi x \qquad -2\pi x$

$$\frac{\pi}{15-2\pi} \approx \frac{(15-2\pi)x}{15-2\pi}$$

$0{,}36 \text{dm} \approx x$

2) $V_{cylindre}$ sachant $x \approx 0{,}36$ ($h = 2 \cdot 0{,}36 + 1 = 1{,}72$)

$$V_{1/2} = \frac{\pi r^2 h}{2} \quad (1/2 \text{ cyl.})$$

$$V = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 1{,}72}{2}$$

$V \approx 2{,}70177 \text{ dm}^3$

3) Conversion

$2{,}70177 \text{ dm}^3 = 2{,}70177 \text{ L}$

$= 2\,701{,}77 \text{ mL}$

Rép: Il y a 2 701,77 mL dans le bocal cylindrique.