Les inéquations et les systèmes d'équations

Nom : ____________________________

Groupe : ___________

Inéquation : Traduction

Une inéquation est un énoncé mathématique comportant une inégalité $(\leq, \geq, <, >)$.

Pour résoudre un problème se traduisant par une inéquation, il faut d'abord le traduire.

Traduction :

1. Identifier la variable .
2. Identifier l'ensemble de nombre se rattachant à la variable. ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$)
3. Écrire l'inéquation avec le bon symbole.

Inéquation	Signification
$x < b$	x est inférieur à b
	x est plus petit que b
	x est moins de b
	x ______ b
	x ______ b
	x ______ ______ b
$x > b$	x est supérieur à b
	x est plus grand que b
	x vaut plus que b
	x dépasse b
	x excède b
	x ______ b

Inéquation	Signification
$x \leq b$	x est inférieur ou égal b
	x est au maximum b
	x est au plus b
	x ne dépasse pas b
	x est au plus égal à b
	x n'excède pas b
$x \geq b$	x est supérieur ou égal b
	x est au minimum b
	x est plus grand ou égal b
	x vaut au moins b
	x est au moins égal à b
	x ______ ______ b

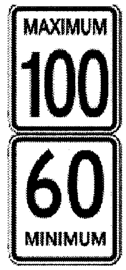
Exemple :

La représentation algébrique

Les renseignements inscrits sur le panneau de signalisation ci-contre peuvent être traduits en mots ou algébriquement.

Un nombre qui délimite les valeurs que peut prendre une variable est appelé « une borne ». Dans l'exemple, 60 est la **borne inférieure** et 100 est la **borne supérieure**.

Une borne peut faire partie ou non des valeurs possibles de la variable.



En mots	**Algébriquement**
La vitesse maximale permise est de 100 km/h.	$v \leq 100$
La vitesse minimale permise est de 60 km/h.	$v \geq 60$

Remarque : *v* représente la vitesse en kilomètres par heure.

Exemple : $2 \leq x < 7$

Les nombres 2 et 7 délimitent les valeurs que peuvent prendre la variable *x*.
Le nombre 2 est une borne qui est incluse dans l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable. Le nombre 7 est aussi une borne de la variable, même s'il n'est pas inclus dans l'ensemble.

On se pratique !

1. - Souligne le mot qui t'indique que c'est une inéquation.
   - Écris le bon symbole ($>, <, \geq, \leq$).

Soit x = salaire
$x \in \mathbb{R}$

a) Le salaire de Nicolas est inférieur à 200$. $x < 200$
b) Le salaire de Nicolas est supérieur à 200$. $x > 200$
c) Le salaire de Nicolas est inférieur ou égal à 200$. $x \leq 200$
d) Le salaire de Nicolas est supérieur ou égal à 200$. $x \geq 200$
e) Le salaire de Nicolas est d'au moins 200$. $x \geq 200$
f) Le salaire de Nicolas est moins de 200$. $x < 200$
g) Le salaire de Nicolas est au maximum 200$. $x \leq 200$
h) Le salaire de Nicolas est d'au plus 200$. $x \leq 200$
i) Le salaire de Nicolas est plus de 200$. $x > 200$
j) Le salaire de Nicolas est au minimum 200$ $x \geq 200$
l) Le salaire de Nicolas ne dépasse pas 200$. $x \leq 200$
l) Le salaire de Nicolas n'excède pas 200$ $x \leq 200$
m) Le salaire de Nicolas est au moins égal à 200$. $x \geq 200$
n) Le salaire de Nicolas est au plus égal à 200$. $x \leq 200$
o) Le salaire de Nicolas dépasse 200$. $x > 200$
p) Le salaire de Nicolas excède 200$. $x > 200$

2. - Identifie la variable utilisée.
- Indique à quel ensemble de nombre elle appartient.
- Traduit par une inéquation.

a) Michel a reçu plus de 250 $ en cadeau à son anniversaire.

x : Montant resu en cadeau $\qquad x > 250$

$x \in \mathbb{R}$

b) Léo possède au plus 500 macarons dans sa collection.

x : Nb de macarons $\qquad x \leq 500$

$x \in \mathbb{N}$

c) Mirka ne regarde jamais plus de 20 heures de télévision par semaine.

x : Nb d'heures de télé par sem. (hebdomadairement)

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad x \leq 20$

d) Le nombre de vaches à la ferme Bellavance ne dépasse jamais 64.

x : Nb de vaches $\qquad x \leq 64$

$x \in \mathbb{N}$

e) Dans mon jardin, la moitié du nombre de plants de petites fèves est au plus égale à 10.

x : Nb de plants de fèves $\qquad \frac{x}{2} \leq 10$

$x \in \mathbb{N}$ $\qquad$ ou $\quad x \leq 20$

f) Le nombre d'heures de travail d'Isabelle en une semaine n'excède jamais 40h et n'est jamais inférieur à 10h.

x : Nb d'heures de travail par sem.

$10 \leq x \leq 40$

$x \in \mathbb{R}$

g) En une journée de 8h, un médecin doit traiter au moins 32 patients mais il ne doit pas dépasser 48 patients.

x : Nb de patients par jour (quotidiennement)

$x \in \mathbb{N}$ $\qquad 32 \leq x \leq 48$

par mois
(mensuellement)

Démarche :
1) identifie la variable
2) Traduis les contraintes

3. Traduis, à l'aide d'inéquations, les problèmes suivants :

a) Zoé a reçu une carte-cadeau de 50 $ qu'elle peut utiliser dans un magasin de matériel d'artiste. Elle veut acheter une toile et au moins 3 tubes de peinture acrylique. Elle choisit une toile qui coûte 23 $, taxes incluses. Chaque tube de peinture coûte 4 $, taxes incluses.

1) x : Nb de tubes de peinture

$x \in \mathbb{N}$

2) $x \geq 3$ et $4x + 23 \leq 50$

b) Mario veut profiter de l'offre suivante : « à l'achat de plus de 150$, obtenez une paire d'écouteur gratuite ». Il décide d'acheter des CD de musique, il en veut plus de 5, sachant qu'ils sont à 15$ chaque, taxes incluses. Il désire aussi un lecteur de disque à 70$, taxes incluses.

1) x : Nb de CD

$x \in \mathbb{N}$

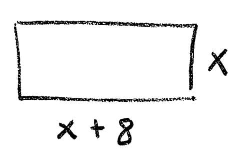
2) $x > 5$ et $15x + 70 > 150$

c) Un rectangle dont les côtés mesurent x et x + 8 mètres et dont le périmètre est au plus de 18 mètres.

1) x : largeur

$x + 8$: longueur

$\} \; x \in \mathbb{R}^{+}_{*}$



2) $2 \cdot \text{largeur} + 2 \cdot \text{longueur} = \text{Périmètre}$

$2x + 2(x+8) \leq 18$

Les modes de représentation des sous-ensembles de nombres

Il existe des façons différentes de représenter l'ensemble des valeurs possibles d'une variable. Ces représentations diffèrent selon que la variable est discrète ou continue. Les tableaux ci-dessous illustrent les représentations possibles de ces deux types de variables.

La représentation d'une variable discrète

Soit l'exemple suivant :

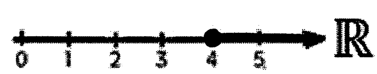
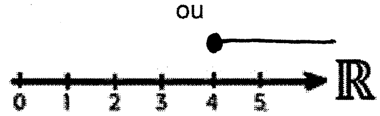
Pierre possède **plus d'un** ordinateur.
Le nombre d'ordinateurs (n) est une variable discrète.

Inéquation	Interprétation	Modes de représentation Droite numérique	Extension
$n > 1$	***n* vaut plus de un**		$n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$

La représentation d'une variable continue

Soit l'exemple suivant :

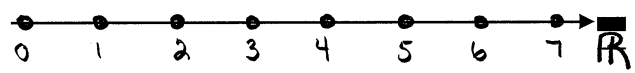
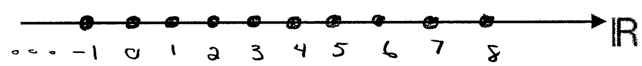
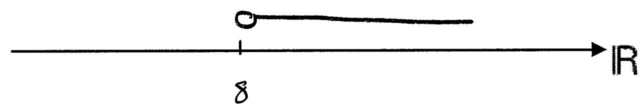
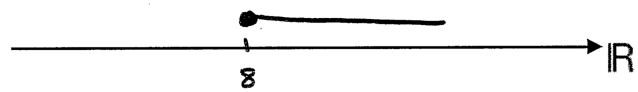
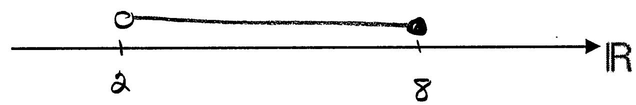
Le séchage de la peinture nécessite **au moins 4 heures**.
Le temps (t) est une variable continue.

Inéquation	Interprétation	Modes de représentation Droite numérique	Intervalle
$t \geq 4$	***t* est au moins 4 heures**	 ou 	$t \in [4, +\infty[$

Lorsqu'une inéquation n'a pas de borne inférieure, on indique $-\infty$ dans l'intervalle. Si l'inéquation n'a pas de borne supérieure, on indique $+\infty$. Le crochet est orienté vers l'extérieur, car on ne peut atteindre l'infini.

On se pratique !

1. Complète le tableau suivant.

Inéquation	Droite numérique	Extension	Intervalle
$x < 8$ $x \in \mathbb{N}$		$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	
$x \leq 8$ $x \in \mathbb{Z}$		$\{\ldots 4, 5, 6, 7, 8\}$	
$x > 8$ $x \in \mathbb{R}$			$x \in]8, \infty[$
$x \leq 8$ $x \in \mathbb{R}$			$x \in [8, \infty[$
$2 < x \leq 8$ $x \in$ [redacted] $\mathbb{R}$			$x \in]2, 8]$

Les règles de transformation des inégalités et des inéquations

Voici des règles qui permettent de résoudre des inéquations.

Règles de transformation		Exemples	
Additionner et soustraire une même quantité aux deux membres d'une inéquation conserve le sens de cette inéquation.	$a < b$ $a + c < b + c$ $a - c < b - c$	$6 < 8$ $6 + 2 < 8 + 2$ $8 < 10$ Vraie!	$6 < 8$ $6 - 2 < 8 - 2$ $4 < 6$ Vraie!
Multiplier ou diviser chaque membre d'une inéquation **par un même nombre strictement positif** conserve le sens de cette inéquation.	$a < b$ $a \times c < b \times c$ $a \div c < b \div c$ où $c \in \mathbb{R}_+^*$	$6 < 8$ $6 \cdot 2 < 8 \cdot 2$ $12 < 16$ Vraie!	$6 < 8$ $6 \div 2 < 8 \div 2$ $3 < 4$ Vraie!
Multiplier ou diviser chaque membre d'une inéquation **par un même nombre strictement négatif** <u>inverse le sens de cette inéquation</u>.	$a < b$ $a \times c > b \times c$ $a \div c > b \div c$ où $c \in \mathbb{R}_-^*$	$6 < 8$ $6 \cdot -2 < 8 \cdot -2$ $-12 < -16$ Faux! $-12 > -16$	$6 < 8$ $6 \div -2 < 8 \div -2$ $-3 < -4$ Faux $-3 > -4$

Remarque : Inverser le sens du symbole, lorsqu'on multiplie ou divise chaque membre d'une inéquation par un nombre strictement négatif, permet d'obtenir une inéquation équivalente, c'est-à-dire une inéquation qui a le même ensemble-solution.

La résolution d'inéquations à une variable

Lorsqu'on résout une inéquation du premier degré à une variable, par exemple
$3(x-5) \leq 5x + 7$,
il faut la transformer en inéquations équivalentes de plus en plus simples.

Ainsi, il faut obtenir une inéquation dont un membre est composé uniquement de la variable et l'autre membre, d'une valeur numérique correspondant à la borne de l'ensemble-solution.

Exemple :

$3(x-5) \leq 5x + 7$	**Validation**
$3x - 15 \leq 5x + 7$ $+15$ $\quad$ $+15$ $-5x$ $\quad$ $-5x$ $3x \leq 5x + 22$ $\dfrac{-2x}{-2} \leq \dfrac{22}{-2}$ $x \geq -11$	Prenons n'importe quel nombre plus grand que -11 exemple : 0 $3(0-5) \overset{?}{\leq} 5 \cdot 0 + 7$ $-15 \leq 7$ Vrai !

Pour **<u>valider</u>**, prendre un *point témoin* faisant parti de la solution trouvée et le remplacer dans l'inéquation de départ

Piège et astuce : Lors de la résolution d'une inéquation, effectuer **une opération à la fois aux deux membres de l'inéquation** est le meilleur moyen d'éviter les erreurs.

a) $9x + 12 \le 3 \quad -12$

$$\frac{9x}{9} \le \frac{-9}{9}$$

$$x \le -1$$

Valide $x = -2$

$$9 \cdot -2 + 12 \overset{?}{\le} 3$$

$$-6 \le 3$$

Vraie !

c) $\frac{5x}{2} + 3 > 8 - 3$

$$\frac{5x}{\cancel{2}} > 5 \cdot \cancel{2}$$

$$\frac{5x}{5} > \frac{10}{5}$$

$$x > 2$$

Valide $x = 4$

$$\frac{5 \cdot 4}{2} + 3 \overset{?}{>} 8$$

$$13 > 8$$

Vraie !

b) $-3(x-3) > -6$

$$-3x + 9 > -6 \quad -9$$

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{-15}{-3}$$

$$x < 5$$

Valide $x = 0$

$$-3(0-3) \overset{?}{>} -6$$

$$9 > -6$$

Vraie !

d) $3(4x - 5) > 9(2x + 1)$

$$12x - 15 > 18x + 9 \quad -12x$$

$$-15 > 6x + 9 \quad -9$$

$$\frac{-24}{6} > \frac{6x}{6}$$

$$-4 > x$$

Donc $x < -4$

Valide $x = -5$

$$3(4 \cdot -5 - 5) \overset{?}{>} 9(2 \cdot -5 + 1)$$

$$-75 > -81$$

Vraie !

Les systèmes d'équations

Un système d'équations est un ensemble de deux ou plusieurs équations.

Exemple : $y_1 = 2x + 4$

$y_2 = 4x$

Dans un problème, on utilise parfois un système d'équation pour trouver la solution :

On peut résoudre un système de deux façons : -Graphiquement
-Algébriquement

Résoudre un système d'équation, c'est :

Graphiquement : Trouver le point (x,y) de rencontre entre les deux droites.

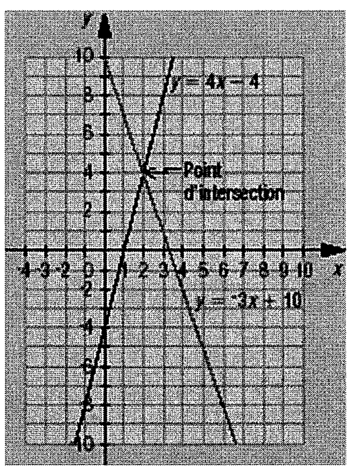
Algébriquement : Trouver le point (x,y) qui fonctionne en même temps dans les deux équations.

Exemple :

1-

Ex. :

$y = -3x + 10$
$y = 4x - 4$



La solution est : (2,4)

Car c'est le point d'intersection des deux droites.

2. ① $y = 2x + 1$
② $y = -4x + 7$

La solution est (1,3) car le point fonctionne dans les deux équations.

Vérifions

$y_1 = 2x + 1$ $\quad$ $y_2 = -4x + 7$

$3 \overset{?}{=} 2 \cdot 1 + 1$ $\quad$ $3 = -4 \cdot 1 + 7$

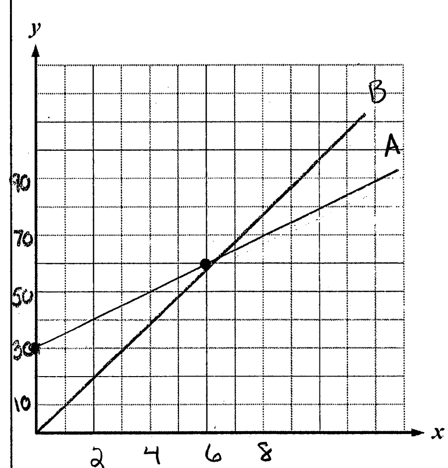
$3 = 3$ $\quad$ $3 = 3$

La résolution graphique

<table>
<tr><th>Étapes</th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td>1- Identifier les variables</td><td>Ex : L'entreprise A loue des consoles de jeux vidéo. Son tarif est de 5$/ jour auquel s'ajoutent les frais fixes de 30$. L'entreprise B loue une console semblable 10$/jour. Pour combien de jours de location un client ou une cliente de l'entreprise A déboursera-t-il la même somme qu'un client de l'entreprise B, et quelle sera cette somme?

x : Nbre de jours de location
y : Montant total</td></tr>
<tr><td>2- Traduire la situation par un système d'équations</td><td>Entreprise A Entreprise B

$y_A = 5x + 30$

$y_B = 10x$</td></tr>
<tr><td>3- Faire une table de valeurs pour chacune des équations et trouver un point commun au deux tables, c'est-à-dire un point de rencontre ou un point d'intersection.</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>Y_A</th><th>Y_B</th></tr>
<tr><td>0</td><td>30 +</td><td>0 −</td></tr>
<tr><td>1</td><td>35 +</td><td>10 −</td></tr>
<tr><td>2</td><td>40 +</td><td>20 −</td></tr>
<tr><td>3</td><td>45 +</td><td>30 −</td></tr>
<tr><td>4</td><td>50 +</td><td>40 −</td></tr>
<tr><td>5</td><td>55 +</td><td>50 −</td></tr>
<tr><td>6</td><td>60</td><td>60</td></tr>
<tr><td>7</td><td>65 −</td><td>70 +</td></tr>
<tr><td>8</td><td>70 −</td><td>80 +</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4- Tracer le graphique. Il faut voir le point de rencontre dans le graphique. Et donner la réponse.</td><td>


Réponse : ______________</td></tr>
</table>

La résolution algébrique : méthode de comparaison

Étapes	
1. Identifier les **variables** 2. Traduire la situation par un **système d'équations.**	Après une tempête de neige, l'opération déneigement est lancée. Deux souffleuses sont utilisées : l'une souffle 20 kg de neige par seconde et l'autre, 36 kg par seconde. La première souffleuse charge un camion qui contient déjà 600 kg de neige, alors que l'autre est vide. Chaque souffleuse commence son chargement en même temps. **On s'intéresse à la masse de neige dans chacun des camions au fil du temps.** Combien de temps faut-il pour que les camions aient la même quantité de neige? X : temps en seconde Y : Masse de neige (kg) $y_1 = 20x + 600$ $y_2 = 36x$
3. **Comparer** les deux expressions : $y_1 = y_2$ et isoler la variable x dans cette équation. (trouver x)	$20x \overset{-20x}{+} 600 = 36x - 20x$ $\frac{600}{16} = \frac{16x}{16}$ $37{,}5 = x$
4. Avec la variable de x trouvée, on **détermine la valeur de y** dans l'une ou l'autre des équations composant le système. (trouver y) On **valide** à l'aide de l'autre équation.	$y_1 = 20 \cdot 37{,}5 + 600$ $y_1 = 1350$ kg $y_2 = 36 \cdot 37{,}5$ $y_2 = 1350$ kg
6. Interpréter la solution et **répondre** à la question.	Après 37,5 sec il y aura 1350 kg de neige

Attention : S'il faut décrire qu'elle équation est la plus avantageuse, il faut soit :

- Faire l'allure du graphique
- Faire une table de valeurs
- Vérifier avec un point témoin dans chaque équation
- Expliquer par une phrase en parlant de l'ordonnée à l'origine.

On se pratique !

1. En sortant de la maison, Jérôme voit sa sœur Jasmine, qui se trouve à une distance de 48 mètres. Il se dirige directement vers elle à une vitesse de 0,5 m par seconde. Quant à Jasmine, elle marche en direction de son frère à une vitesse de 0,75 m par seconde. **À quelle distance de la maison se rencontreront-ils?** **Combien de temps se sera-t-il écoulé après que Jérôme sera sorti de la maison?**

1) Identifie les variables :

x : temps écoulé depuis le départ de Jérôme (sec)

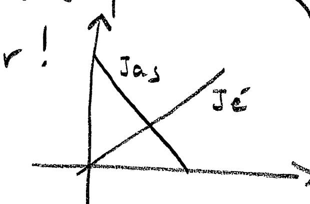
y : distance de la maison (m)

2) Traduis par un système d'équation

Jasmine : $y_1 = -0,75x + 48$

Jérôme : $y_2 = 0,5x$

L'esquisse peut aider !



3) Résous :

$$y_1 = y_2$$

$$-0,75x \overset{+0,75x}{} + 48 = 0,5x + 0,75x$$

$$\frac{48}{1,25} = \frac{1,25x}{1,25}$$

$$38,4 = x$$

$y = ?$ si $x = 38,4$

$y_1 = -0,75 \cdot 38,4 + 48$ $\qquad$ $y_2 = 0,5 \cdot 38,4$

$y_1 = 19,2$ $\qquad$ $y_2 = 19,2$

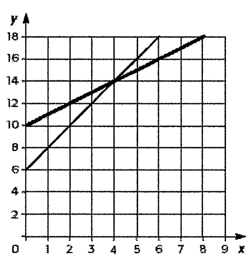
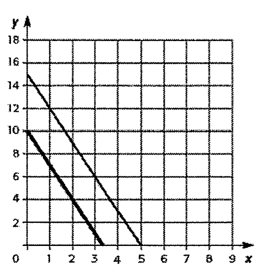
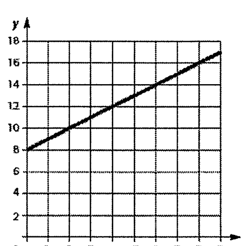
Rép : Jasmine et Jérôme vont se rencontrer après 38,4 sec à 19,2 m de la maison.

Le nombre de solution d'un système d'équations

Dans la résolution graphique

Dans le tableau ci-dessous, on présente le nombre de solutions d'un système d'équations selon la position relative des droites :

$$y_1 = a_1x + b_1$$
$$y_2 = a_2x + b_2$$

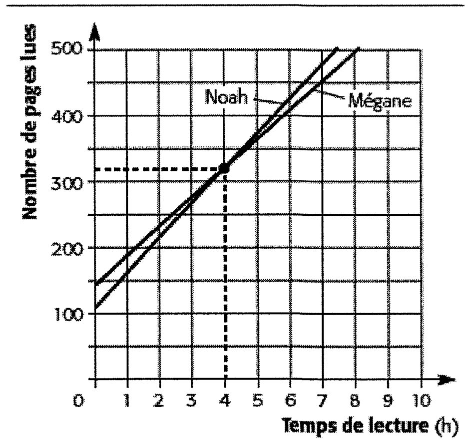
Position relative des deux droites		Équations – Paramètres	Équations – Exemples	Nombre de solutions
Droites sécantes		$a_1 \neq a_2$	**$y = x + 10$** $y = 2x + 6$	**Une solution** (le point de rencontre)
Droites parallèles distinctes		$a_1 = a_2$ $b_1 \neq b_2$	**$y = -3x + 10$** $y = -3x + 15$	**Aucune solution** (aucun point de rencontre)
Droites confondues		$a_1 = a_2$ $b_1 = b_2$	**$y = x + 8$** $y = 8 + x$	**Infinité de solutions** (tous les points appartenant à la droite)

Dans la résolution algébrique

Solution unique	Aucune solution	Infinité de solutions
$y_1 = 6x - 5$ $y_2 = 2x + 27$ car $a_1 \neq a_2$ $-2x \quad -2x$ $6x - 5 = 2x + 27$ $+5 \quad +5$ $4x - 5 = 27$ $\frac{4x}{4} = \frac{32}{4}$ $x = 8$	$y_1 = 4x + 8$ $y_2 = 4x + 2$ car $a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$ $-4x \quad -4x$ $4x + 8 = 4x + 2$ $8 = 2$ toujours faux !	$y_1 = 6x + 10$ $y_2 = 2(3x + 5)$ car $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ $6x + 10 = 2(3x + 5)$ $-6x \quad -6x$ $6x + 10 = 6x + 10$ $10 = 10$ ou $0 = 0$ toujours vraie !
Seule la valeur 8 rend l'égalité vraie.	Aucun nombre réel ne rend l'égalité vraie.	Tous les nombres réels rendent l'égalité vraie.

On se pratique !

1. Cet après-midi, Mégane et Noah ont décidé de poursuivre la lecture du roman qu'ils ont commencé la veille. Mégane reprend sa lecture à la page 147 et lit 44 pages à l'heure. Noah, lui, reprend sa lecture à la page 115 et lit 52 pages à l'heure.



a) Après combien de temps Mégane et Noah auront-ils lu le même nombre de pages ?

Après 4h.

b) Décrivez précisément qui a lu le plus de page?

-> Avant 4h c'est Mégane

-> À 4h les deux sont à égalités

-> Après 4h c'est Noah

c) Qui a lu le plus de pages pour 7 heures de lecture?

Noah

d) Si Mégane décide de lire plus rapidement soit 52 pages à l'heure au lieu de 44 pages tout en commençant à la page 147. Avec ces nouvelles conditions, y a-t-il un moment où ils auront lu le même nombre de pages? Si oui, quel est ce moment. Sinon, explique pourquoi?

Mégane : $y = 52x + 147$

Noah : $y = 52x + 115$

Rép: Ce sont maintenant deux droites parallèles donc à aucun moment les deux auront lu le même nombre de pages