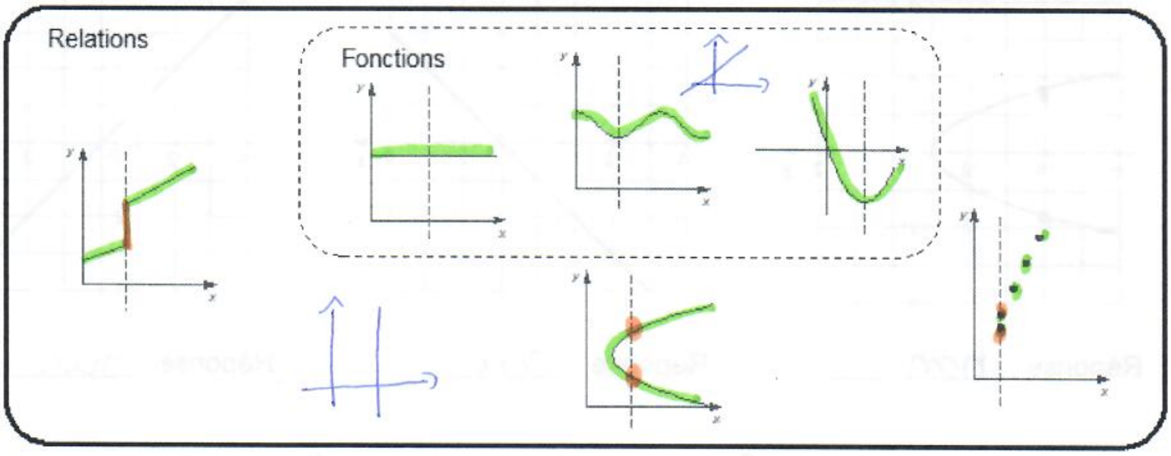
Les fonctions

Une fonction est une relation qui associe à toutes les valeurs que peut prendre la variable indépendante, x, ***une et une seule*** valeur de la variable y.



Note : Une relation doit passer le « **test de la ligne verticale** » pour être une fonction : si toute droite verticale coupe le graphique en au plus un point, alors cette relation est une fonction.

La notation fonctionnelle

On utilise souvent la **notation fonctionnelle *f(x)*** pour désigner la valeur de la variable dépendante (au lieu de y).

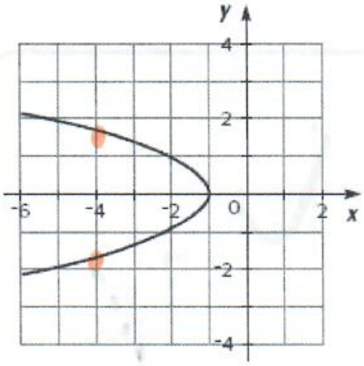
- *f(x)* se lit «*f* de *x* ».   f(x) remplace y
- *f* est le nom de la fonction, *x* est la variable indépendante et *f(x)* est la variable dépendante. Donc $(x,y) \leftrightarrow (x,f(x))$
- On peut utiliser des variables différentes comme :
  d(t) , par exemple pour représenter la distance en fonction du temps.
  s(h) , par exemple pour représenter le salaire selon le nombre d'heures travaillées.
  c(n) , par exemple pour représenter le coût selon le nombre de livres achetés.

Note : Toutes les droites sont des fonctions **sauf la droite** verticale.

On se pratique !

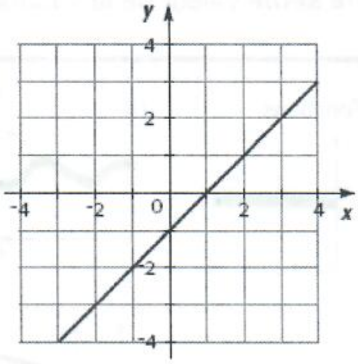
1. Indique si les graphiques suivants correspondent à des fonctions.

a)



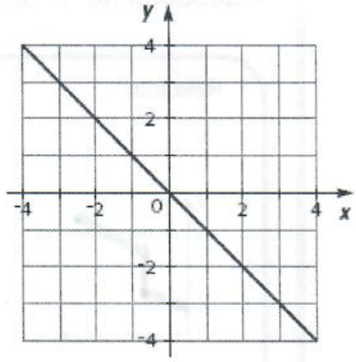
Réponse : non

e)



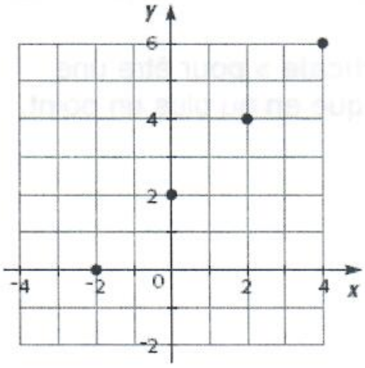
Réponse : oui

i)



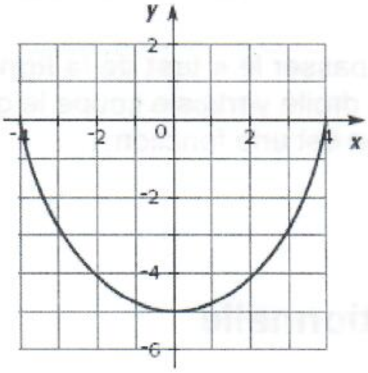
Réponse : oui

b)



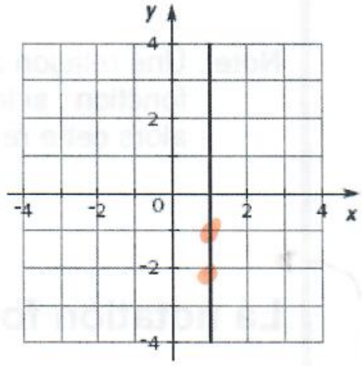
Réponse : oui

f)



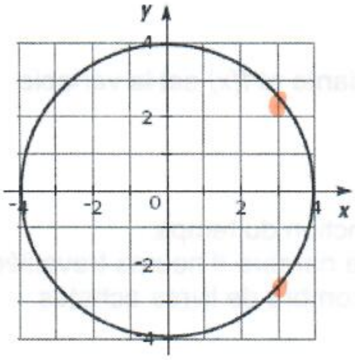
Réponse : oui

j)



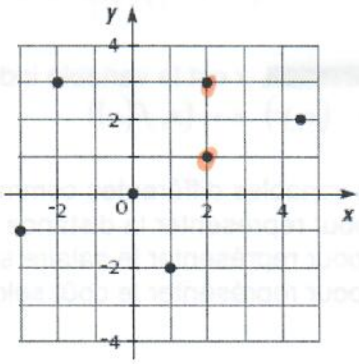
Réponse : non

c)



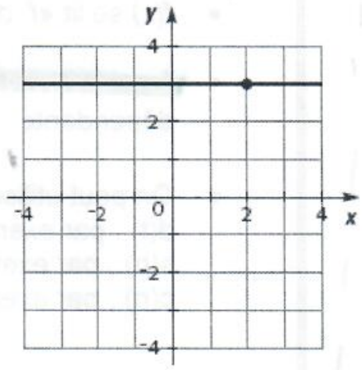
Réponse : non

g)



Réponse : non

k)



Réponse : oui

2. Transforme les équations de droites suivantes en notation fonctionnelle.

a) $y = 2x + 8$ $f(x) = 2x + 8$

b) $y = -3x + 5$ $g(x) = -3x + 5$

3. À quel couple correspond :

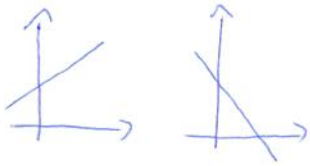
a) $f(5) = 28$ $(5, 28)$

b) $f(-2) = 13$ $(-2, 13)$

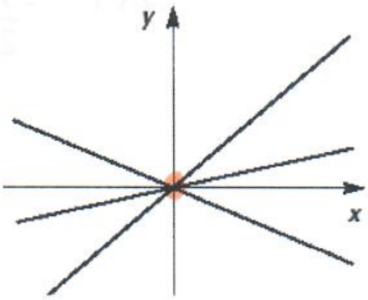
Fonction affine vs fonctions affines particulières

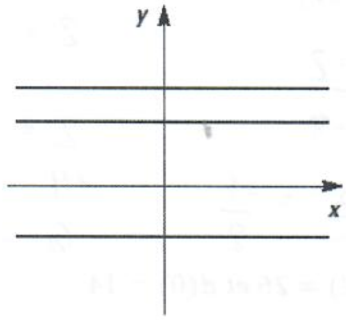
fonction affine

$f(x) = ax + b$



Si $b = 0$	Si $a = 0$
Équation : $f(x) = ax$	Équation : $f(x) = b$
Graphique :	Graphique :





fonction (affine) linéaire

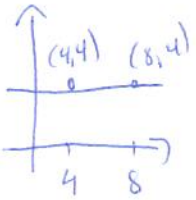
fonction (affine) constante

On se pratique !

1- Détermine l'équation des droites passant par les points suivants ainsi que le type de fonction.

a) $g(4) = 4 \ \ et \ g(8) = 4$

$(4, 4)$
$(8, 4)$



Rép: fonction constante
$g(x) = 4$

b)

x	0	2	4	6
f(x)	0	-2	-4	-6

$b = 0$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{-2-0}{2-0}$

$a = -1$

Rép: fonction linéaire
$f(x) = -x$

c) $f(8) = 2 \ et \ f(-2) = 7$

$(8, 2)$
$(-2, 7)$

1) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{7-2}{-2-8}$

$a = \frac{5}{-10} = \frac{-1}{2}$

2) $y = -\frac{1}{2}x + b$

$2 = -\frac{8}{2} + b$

$2 = -4 + b$

$+4 \quad +4$

$6 = b$

Rép: fonction affine
$f(x) = -\frac{x}{2} + 6$

d) $d(2) = 26 \ et \ d(0) = 14$

$(2, 26)$
$(0, 14)$

1) $b = 14$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{14-26}{0-2}$

$a = \frac{-12}{-2} = 6$

Rép: fonction affine
$d(x) = 6x + 14$

2- À partir de la fonction affine suivante : $g(s) = -4s + 16$, Trouve :

a) $g(8) = ?$

$g(8) = -4 \cdot 8 + 16$

$g(8) = -16$ (Correspond au couple $(8, -16)$)

b) La valeur de s sachant que $g(s) = 20$

$20 = -4s + 16$

$-16 \qquad -16$

$\frac{4}{-4} = \frac{-4s}{-4}$

$-1 = s$ (Correspond au couple $(-1, 20)$)

3- Parmi les règles suivantes, lesquelles représentent des fonctions affines, linéaires ou constantes ?

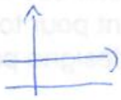
#1 $f(x) = 8$ 

#5 $m(n) = \frac{n}{4}$ 

#2 $h(t) = -\frac{2t}{5} + \frac{1}{8}$ 

~~#6~~ $y = \frac{3}{x}$ 

#3 $d(t) = \frac{t+7}{3}$ 

#7 $g(a) = -9$ 

#4 $g(x) = 4x$ 

#8 $c(n) = -5n + 12$ 

Réponse :

Fonctions affines : 1-2-3-4-5-7-8

Fonctions constantes : 1-7

Fonctions linéaires : 4-5

La fonction de variation inverse (ou fonction rationnelle)

La fonction de variation inverse est une fonction dont le produit des valeurs associées des variables indépendante et dépendante est constant.

Exemple : Maxime exige un montant de 60 $ pour peindre les murs d'une cuisine. Son salaire par heure varie en fonction du temps qu'il prendra pour effectuer la tâche. y x

Voici différents modes de représentation d'une fonction de variation inverse.

Indices
x augmente
y diminue
x·y toujours pareil
unités y : $/h, ...

Mode de représentation	Exemple

La table de valeurs

La table de valeurs d'une fonction de variation inverse montre que le produit des valeurs associées est constant.

Nombre d'heures	1	2	3	4	5
Salaire horaire ($/h)	60	30	20	15	12

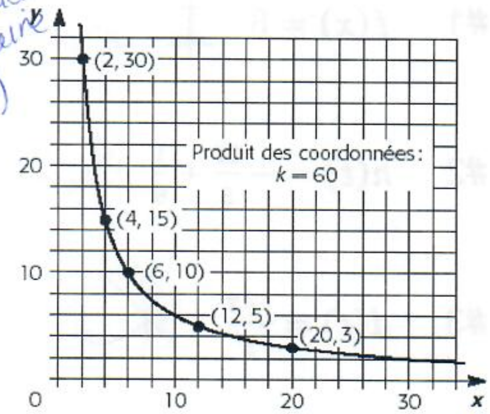
Le graphique

La représentation graphique d'une fonction de variation inverse est une courbe décroissante qui s'approche des deux axes sans y toucher.

Le produit des coordonnées est constant pour tout point du graphique. On le désigne par **k**.

$$x\,y = k$$

Salaire horaire ($/h)



Nb heures

La règle

La représentation algébrique d'une fonction affine est de la forme :

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{k}{x}$$

où k représente une constante.

Remarque : Les variables x et y ne peuvent pas égaler 0.

La règle de la fonction est :

$f(x) = \frac{60}{x}$

Si Maxime travaille durant 10 heures, alors

$f(10) = \frac{60}{10}$

$f(10) = 6$

son salaire horaire sera de 6 $/h.

Si Maxime a un salaire horaire de 15$/h, alors

$15 = \frac{60}{x} \rightarrow x = \frac{1 \cdot 60}{15} = 4$

Elle a travaillé 4 heures.

On se pratique !

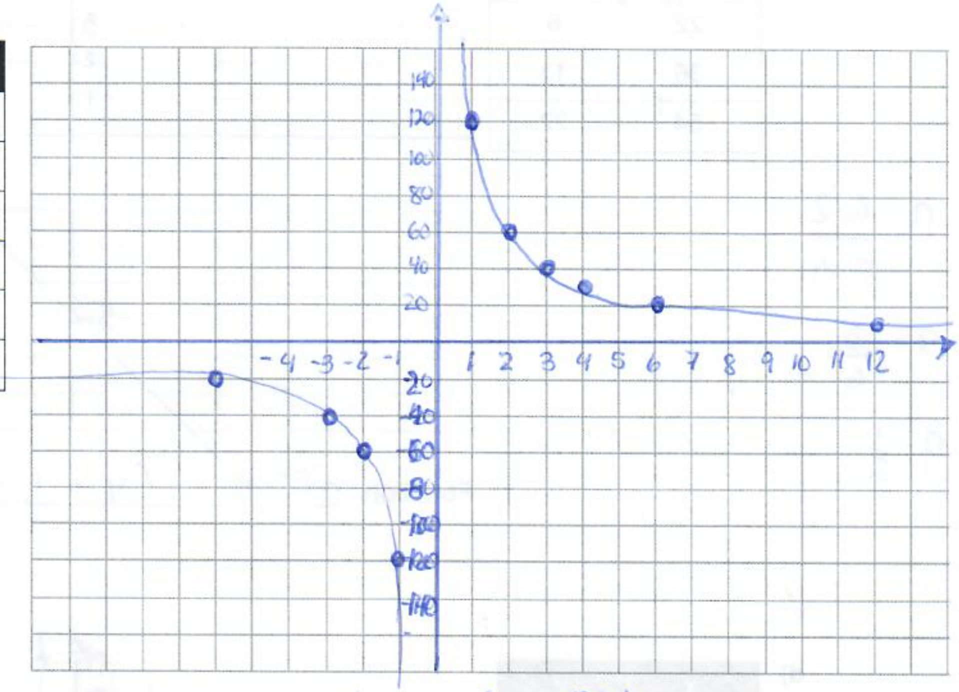
1. Pour chacune des tables de valeurs suivantes, trace le graphique correspondant et détermine s'il s'agit d'une fonction affine ou d'une fonction de variation inverse.

a)

$x \cdot y$	x	y
120	3	40
120	4	30
120	5	24
120	6	20
120	10	12
120	12	10
	2	60
	1	120

aussi

-1	-120
-2	-60
-3	-40



Fonction : Rationnelle $\left(y = \frac{120}{x}\right)$

b)

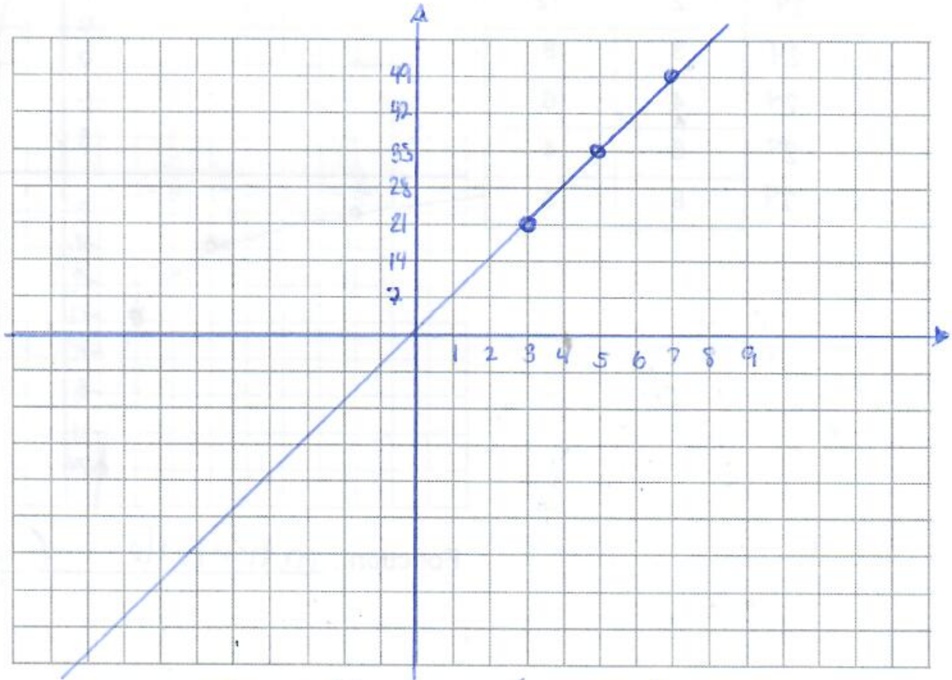
x	y
3	21
5	35
7	49
9	63
11	77
13	91

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{35-21}{5-3}$

$a = \frac{14}{2}$

$a = 7$



Fonction : affine linéaire $(y = 7x)$

2. Jacques organise un spectacle pour son groupe de musique « Les Yukulala ». La location de la salle et l'embauche du technicien lui coûtent 400 $. Son but n'étant pas de faire un profit, il souhaite fixer le prix d'entrée en fonction du nombre de billets qu'il pense vendre.

Y X

a) Détermine la variable dépendante et la variable indépendante de cette situation.

x = nb billets vendus
y = Coût par billet ($/billet)

b) Écris son équation. $y = \frac{400}{x}$

c) Si la salle comporte 115 places, quel sera le prix minimal d'un billet ? $y = ?$ si $x = 115$

X Y

$y = \frac{400}{115}$

$y \approx 3,48$ $/billet   Rep: Le prix minimal sera de 3,48$/billet (3,50$/bille

d) Jacques craint de vendre moins de billets que prévu. Quel effet cela aura-t-il sur le prix de vente du billet ?

Le prix devra être plus élevé.

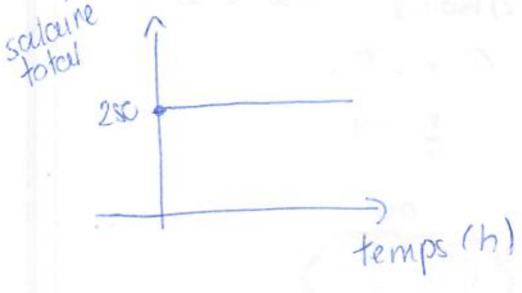
3. Yann repeint la cuisine de ses voisins. Il recevra 250$, peu importe le nombre d'heures que ça lui prendra.
Représente la situation selon les variables déjà identifiées.

x= temps (h)
y= salaire total ($)

Équation : $y = 250$

Type de fonction : affine constante

Allure du graphique :

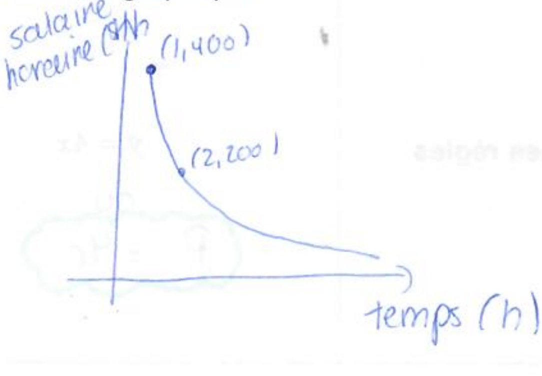


x= temps (h)
y= salaire horaire ($/h)

Équation : $y = \frac{400}{x}$

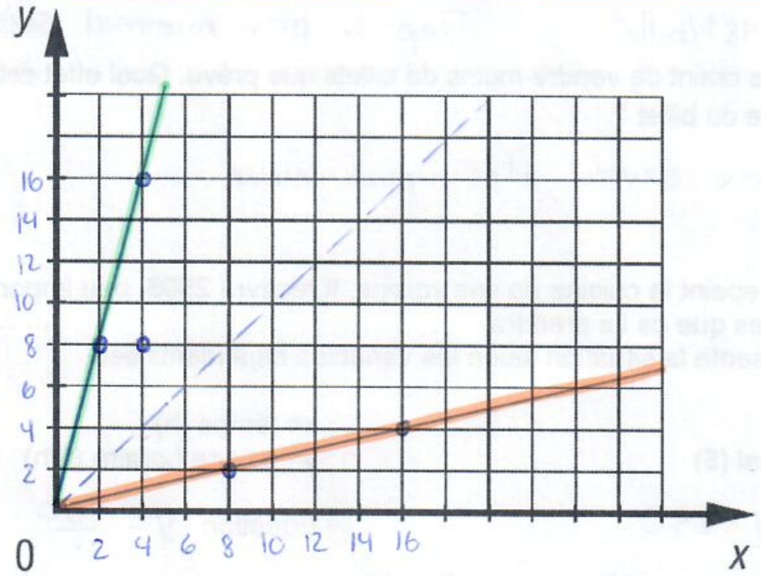
Type de fonction : rationnelle

Allure du graphique :



La relation réciproque

Une relation réciproque, ou tout simplement une **réciproque,** s'obtient en intervertissant les valeurs de chacun des couples d'une relation entre deux variables. La relation réciproque fait donc l'inverse de la relation à laquelle elle est associée.

<table>
<tr><th>Mode de représentation</th><th>Relation</th><th>Relation réciproque</th></tr>
<tr><td>Les mots</td><td>Le périmètre d'un carré dépend de la mesure de son côté.</td><td>La mesure du côté d'un carré dépend de son périmètre.</td></tr>
<tr><td>Les tables de valeurs</td><td>x = mesure d'un coté (cm)
y = périmètre (cm)
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td></tr></table></td><td>x = périmètre (cm)
y = mesure
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Les graphiques
Les graduations sont déjà là.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Les règles</td><td>$y = 4x$
ou
$P = 4c$</td><td>Démarche :
1) Intervertir x et y
2) Isole y
1) $x = 4y$
$\frac{x}{4} = y$
ou
$C = \frac{P}{4}$</td></tr>
</table>

Tous les couples (x, y) d'une relation sont des couples (y, x) de sa relation réciproque. Ainsi, (1, 4) et (4, 1) sont appelés «des couples réciproques».

On se pratique !

1. Dans chaque cas, représente graphiquement la réciproque.

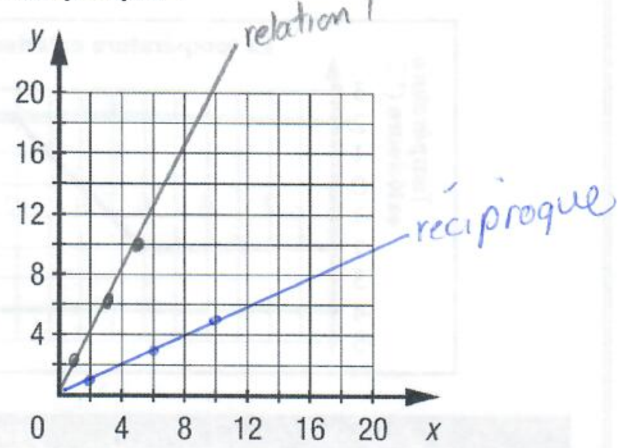
a) Relation 1

x	1	3	5	7	9
y	2	6	10	14	18

Réciproque :

x	2	6	10	14	18
y	1	3	5	7	9

Réciproque 1



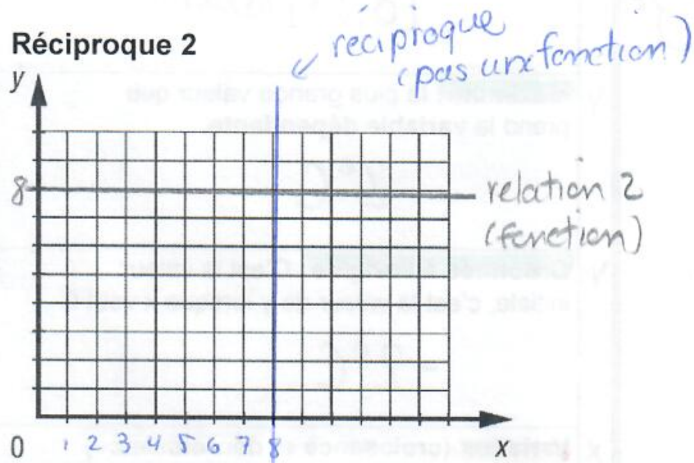
b) Relation 2

x	-1	1	2	3	4
y	8	8	8	8	8

Réciproque :

x	8	8	8	8	8
y	-1	1	2	3	4

Réciproque 2



2. Détermine l'équation des réciproques des relations suivantes :

1) $y = x + 10$

$x = y + 10$

$-10 \quad -10$

$\boxed{y = x - 10}$

ou

$y^{-1} = x - 10$

2) $y = 4x$

$\frac{x}{4} = \frac{4y}{4}$

$\boxed{y = \frac{x}{4}}$

3) $y = \frac{x}{3}$

$3 \cdot x = \frac{y}{3} \cdot 3$

$\boxed{y = 3x}$

4) $y = \frac{20}{x}$

$\frac{x}{1} = \frac{20}{y}$

$y = \frac{1 \cdot 20}{x}$

$\boxed{y = \frac{20}{x}}$