Mathématiques 3e sec : Chapitre 4

Les situations fonctionnelles

Nom : ______________________________

Groupe : ____________

Les variables indépendante et dépendante

Dans une relation entre deux variables, **la variable dépendante (y)** est celle qui est déterminée à partir de la **variable indépendante (x)**. On dit aussi que les variations de la **variable indépendante** ont une influence sur les variations de la **variable dépendante.**

Exemples :

1) Romain enseigne le ski. Son tarif est de 20 \$ par leçon. D'une semaine à l'autre, ses revenus varient selon le nombre de leçons qu'il offre.

Y x

x **Variable indépendante :** Nb de leçons

y **Variable dépendante :** Revenus de la semaine (\$)

2) Sarah lance un ballon de football à son amie. La distance entre le ballon et le sol est déterminée par le temps écoulé depuis le lancer.

Variable indépendante : Temps écoulé (sec)

Variable dépendante : Distance entre le ballon et le sol (m)

Astuce : Chercher des mots clés :

y	**dépend de**	x
	en fonction de	
	selon	
	est déterminé par	
	par	

Aussi, lorsqu'on a une information comme : $5\frac{\$}{h}$ les unités sont associées à $\frac{y}{x}$. Alors

$x = temps\ (h)$
$y = salaire\ (\$)$

** salaire horaire : heure
salaire journalier : jour (ou salaire quotidien)
salaire hebdomadaire : semaine
salaire mensuel : mois
salaire annuel : année

On se pratique !

1. Détermine la variable dépendante et la variable indépendante de chacune des situations suivantes.

$ / h

a) Une école de golf demande une somme de base de 100 $ pour l'inscription, puis 45 $ de l'heure pour les leçons.

x Variable indépendante : temps (h)

y Variable dépendante : Coût total ($)

b) Louis remplit un réservoir. La quantité d'eau dans son réservoir dépend du temps écoulé.

x Variable indépendante : Temps écoulé (min)

y Variable dépendante : Qté eau DANS LE RÉSERVOIR (L)

c) Dans un laboratoire médical, une technicienne analyse 12 échantillons par jour.

x Variable indépendante : Temps (jours)

y Variable dépendante : Nb échantillons analysés

d) En faisant le plein, on observe la quantité d'essence que la pompe déverse dans le réservoir selon le prix à payer.

x Variable indépendante : Prix à payer ($)

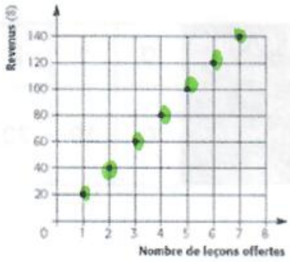
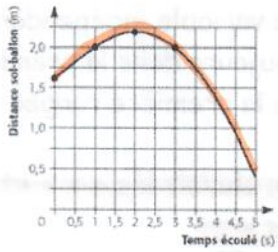
y Variable dépendante : Qté essence déversée (L)

e) Pour mes vacances, je me déplacerai en vélo. Plus j'aurai de temps de vacances, plus je vais parcourir de kilomètres.

x Variable indépendante : Temps (jours)

y Variable dépendante : Distance parcourue (km

Les types de variables

Variable discrète	Variable continue
Une variable est discrète si on peut énumérer ses valeurs.	Une variable est continue si ses valeurs appartiennent à un intervalle.
Exemple : Le nombre n de leçons de ski offertes par Romain. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ *leçons* Ensemble de nombre de référence : ℕ On utilise les **accolades** { } pour énumérer l'ensemble solution **en extension**.	Exemple : Le temps t écoulé depuis le lancer du ballon par Sarah. $t \in [0, 7]$ *secondes* Ensemble de nombre de référence : ℝ On utilise les **crochets** [ ] pour décrire l'ensemble en **intervalle**.
Dans un graphique, la situation se traduit par des **points**. 	Dans un graphique, la situation se traduit par une **ligne continue**. 

On se pratique !

1. Détermine si les variables suivantes sont discrètes ou continues et identifie l'ensemble de référence et le mode de représentation de cet ensemble à l'aide d'un exemple.

a) Le nombre n de boutons sur une chemise varie de 3 à 12 boutons.

Type : discrète Ensemble : ℕ Mode de représentation : $n \in \{3, 4, 5, 6, \ldots 8\}$ bouto

b) La quantité d'eau dans une piscine durant l'été varie de 50 000 L à 55 000 L d'eau.

Type : continue Ensemble : ℝ Mode de représentation : $x \in [50\,000, 55\,000]$

c) Le temps pris pour courir un 100 m au dernier jeu Olympique a varié de 10,8 sec à 11,2 sec :

Type : continue Ensemble : ℝ Mode de représentation : $t \in [10{,}8 ; 11{,}2]$ sec

d) La capacité d'une salle de réunion est de maximum 52 personnes.

Type : discrète Ensemble : ℕ Mode de représentation : $n \in \{0, 1, 2, \ldots 52\}$ pe

Les modes de représentation d'une droite

Les modes de représentation d'une droite sont les différents moyens qui permettent de comprendre cette relation. Le tableau ci-dessous présente différents modes de représentation pour une situation donnée.

<table>
<tr><th>Mode de représentation</th><th></th></tr>
<tr><td>Les mots

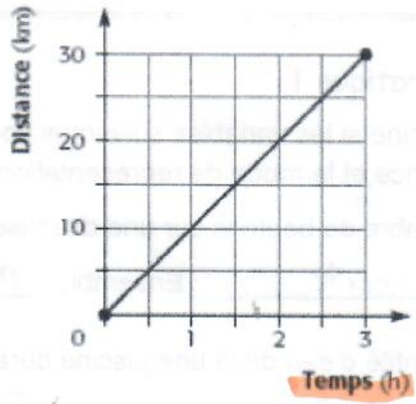
- Identifier les variables</td><td>Durant l'été, Jasmine a fait du vélo à tous les jours. Elle roulait à une vitesse moyenne de 10 km/h.
10 km par heure
y x
$x =$ temps (h)
$y =$ distance parcourue (km)</td></tr>
<tr><td>La table de valeurs

- La variable indépendante est toujours dans la première colonne ou la première rangée.

- On choisit les « x » et on calcule les « y ».</td><td><table><tr><td>X</td><td>Temps écoulé (en heures)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>Y</td><td>Distance parcourue (en km)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Le graphique

- La variable indépendante est sur l'axe des abscisses (axe horizontal)

- Faire une table de valeurs.
- Identifier les axes.
- Bien graduer (bonds égaux).
- Placer 3 points. ou 4.
- Relier à la règle.
* Attention au début et à la fin.

Note : une coupure d'axe est possible seulement sur l'axe des ordonnées (y) si :
- le premier point est plus haut que la coupure d'axe
- la droite est croissante</td><td>
Variable indépendante</td></tr>
<tr><td>La règle (ou l'équation)</td><td>$y = 10x$</td></tr>
</table>

On se pratique !

1. Représente les situations suivantes à l'aide d'un graphique et d'une table de valeurs.

a) Au début du voyage, Kevin avait 350 $, mais il a dépensé 50 $ par jour. Décris la situation représentant le montant d'argent disponible selon le nombre de jours écoulés.

y x

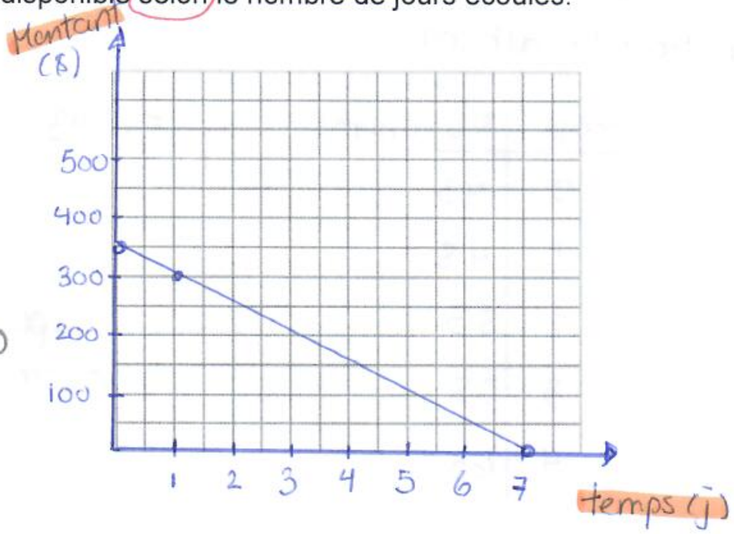
1) Variables

x = nb jours écoulés

y = Montant disponible ($)

Moi, en lisant le problème, je vois l'équation :

$y = -50x + 350$



2)

	temps	Montant ($)
Début →	0	350
	1	300
	2	250
	3	200
	4	150
	5	100
	6	50
Fin →	7	0

b) Au début du voyage, Kevin avait 350 $, mais il a dépensé 50 $ par jour. Décris la situation représentant le montant total dépensé selon le nombre de jours écoulés.

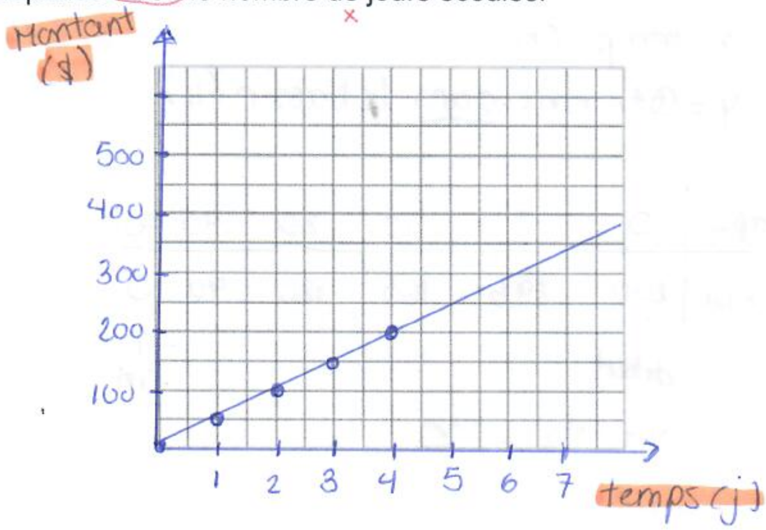
y x

1) Variables

x = temps (j)

y = Montant dépensé ($)

$y = 50x$



2)

temps	Montant
0	0
1	50
2	100
3	150
⋮	

b) Sandra possède déjà 43 albums de bandes dessinées et elle en achète 5 par mois. Décris la situation représentant le nombre de bandes dessinées totales de Sandra en fonction de nombre de mois écoulés.

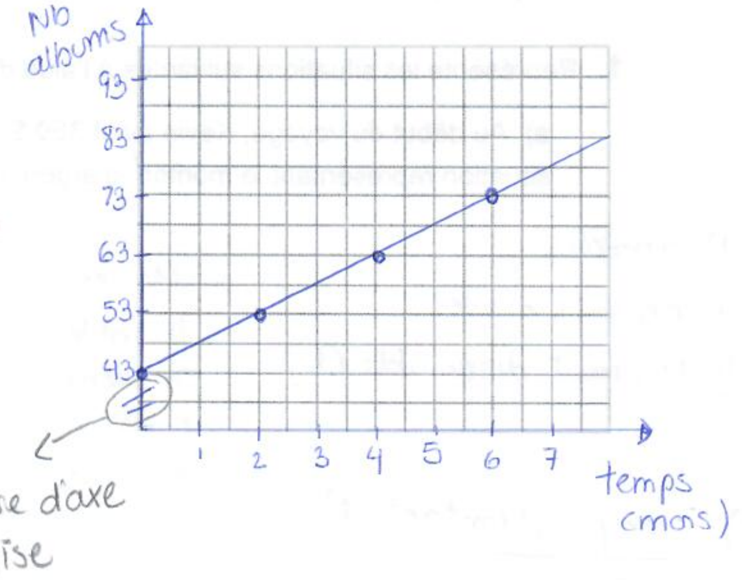
1) Variables

x = temps (mois)

y = Nb total album

temps	Nb albums
0	43
1	48
2	53
3	58
4	63

$y = 5x + 43$



c) Un bassin qui contient 200 litres d'eau fuit. Après 1 heure, il ne contient plus que 196 litres. Décris la situation représentant la quantité d'eau dans le bassin qui varie selon le temps écoulé.

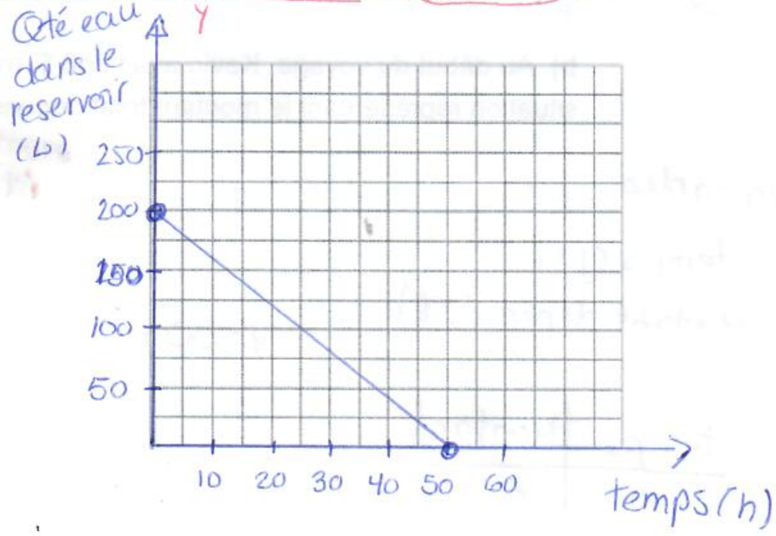
1) Variables

x = temps (h)

y = Qté eau dans le bassin (L)

temps	0	1	10	20	40	50
Qté eau	200	196	160	120	40	0
	début					fin

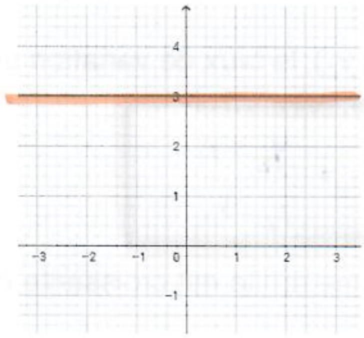
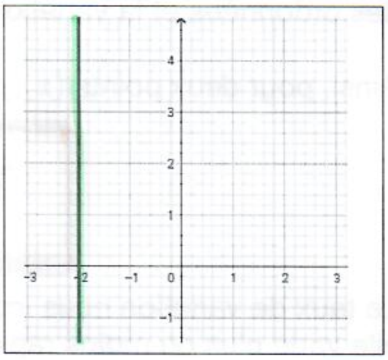
$y = -4x + 200$



La règle ou l'équation d'une droite

Dans le plan cartésien, on peut tracer une infinité de droites et chacune peut être représentée par une table de valeurs et une équation.

Les droites verticales et horizontales

<table>
<tr><th></th><th>Droite horizontale</th><th>Droite verticale</th></tr>
<tr><td>Graphique</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Table de valeurs</td><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Équation (règle)</td><td>$y = 3$</td><td>$x = -2$</td></tr>
<tr><td>Particularités</td><td>Après p. 8
$y = 0x + 3$</td><td>Seule équation d'une droite commençant par x</td></tr>
</table>

Les droites obliques

Modèle d'équation d'une droite oblique : $y = ax + b$

x et y sont les variables

a et b sont les paramètres

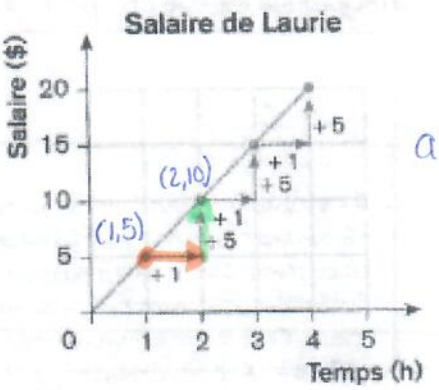
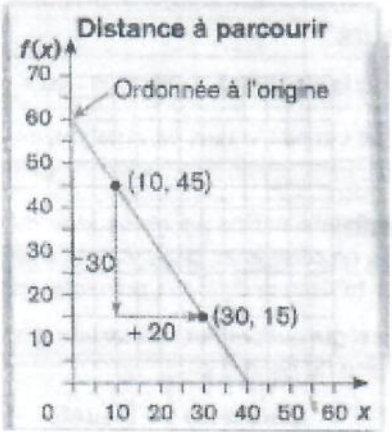
Le taux de variation : a

Le taux de variation entre deux points d'une fonction est le rapport entre la variation des ordonnées et la variation des abscisses de ces deux points.

Ainsi, pour deux points $(x_1, y_1)et\ (x_2, y_2)$, le taux de variation est le rapport :

$$\boxed{a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Le taux de variation nous indique si une droite est croissante ou décroissante et si elle varie plus ou moins rapidement.

Droite croissante #1	Droite décroissante
 $a+$	 $a-$
$(\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{5})$ $(\underset{x_2}{2}, \underset{y_2}{10})$ $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $a = \frac{10-5}{2-1}$ $\boxed{a = \frac{5}{1}}$ $\frac{y}{x}$ $\uparrow 5$ $\rightarrow 1$ $a = 5\,\$/h$	$(10, 45)$ $(30, 15)$ $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $a = \frac{15-45}{30-10}$ $a = \frac{-30}{20}$ $\downarrow 30$ $\rightarrow 20$ $a = -1{,}5\ km/min$

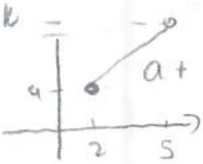
On se pratique !

attention aux signes

1. Dans chaque cas, calcule le $\boxed{\text{taux de variation}}$ de la droite passant par les points donnés.

a) (2, 4) et (5,10)

$x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$



$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

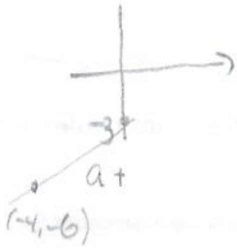
$a = \dfrac{10-4}{5-2}$

$a = \dfrac{6}{3}$

$\boxed{a = 2}$

b) (0, -3) et (-4, -6)

$x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$



$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{-6 - -3}{-4 - 0}$

$a = \dfrac{-3}{-4}$

$\boxed{a = \dfrac{3}{4}}$ ou $\boxed{a = 0{,}75}$

2. Calcule le taux de variation de cette droite.

Temps (min)	Niveau eau (cm)
0	63
2	53
5	38
10	13

unités

a -

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{53-63}{2-0}$

$a = \dfrac{-10}{2} \rightarrow \boxed{a = -5\ \text{min/cm}}$

3. Détermine le taux de variation de chacune des situations suivantes. **Attention, identifie d'abord tes variables.**

variables
signe a
valeur a
unités a

a) Julien travaille dans un restaurant. Il gagne 8,50 $ de l'heure.

$\boxed{a = 8{,}50\ \$/h}$

x = temps (h)
y = Salaire ($)

b) Jasmine dépose 25 $ par semaine dans son compte.

x = temps (semaine)
y = Montant dans compte ($)

$\boxed{a = 25\ \$/\text{semaine}}$

a -

c) Julien doit se rendre chez son ami Mathieu. Il lui reste 60 km à parcourir et il roule à 15 km/h.

x = temps (h)
y = distance à parcourir ($)

$\boxed{a = -15\ \text{km/h}}$

d) Isabelle vide sa piscine. Au début il y a 50 000 litres d'eau et 5 heures plus tard, il reste 45 000 litres.

a -

1) x = temps (h)
y = Qté eau dans le reservoir (L)

2) (0 , 50 000)
(5 , 45 000)

3) $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{45\,000 - 50\,000}{5 - 0}$

$a = \dfrac{-5000}{5}$

$\boxed{a = -1000}$

Les droites obliques

$y = ax + \underline{\underline{b}}$

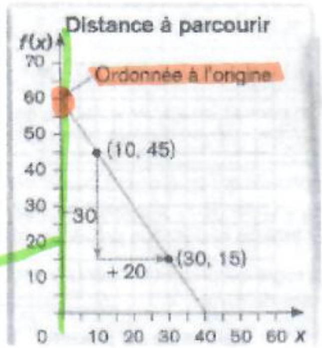
L'ordonnée à l'origine : b (ou la valeur initiale)

La valeur initiale ou l'ordonnée à l'origine, correspond à la valeur de la variable dépendante lorsque la valeur de la variable indépendante est 0. valeur y lorsque x = 0

C'est donc la valeur de y lorsque $x = 0$. Quand $x = 0$, $y = b$.

- Sur un **graphique** c'est le point d'intersection entre la droite et **l'axe des** y (axe des ordonnées)

Exemple :



axe des ordonnées

L'ordonnée à l'origine est : 60 km ($b = 60$ km)

- Dans une **table de valeur**, si possible, il suffit de repérer la valeur de y lorsque x vaut 0.

x	-2	-1	0	1
y	5	8	11	13

L'ordonnée à l'origine est : 11 ($b = 11$)

- Dans une **équation**, c'est le terme constant.

Exemple : Pour $y = 4x - 15$, l'ordonnée à l'origine est : -15 ($b = -15$)

- Lorsqu'on connait un **point** et le **taux de variation** de la droite, on remplace tout dans $y = ax + b$ et on isole b.

Exemple : Le taux de variation est -4 et la droite passe par (5, 10).

$y = -4x + b$
$10 = -4(5) + b$
$10 = -20 + b$

$10 = -20 + b$
$+20 \quad +20$
$30 = b$

L'ordonnée à l'origine est : 30 ($b = 30$)

On se pratique !

1. Détermine l'ordonnée à l'origine pour chacune des situations suivantes :

a)

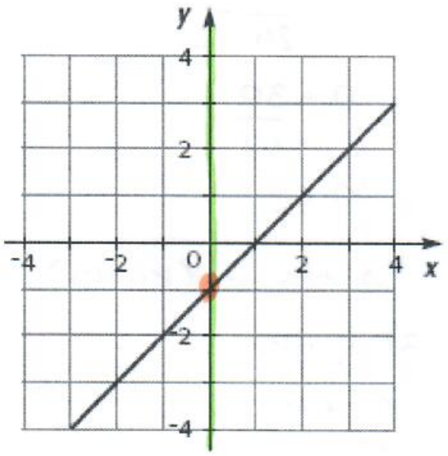
x	0	2	4	5
y	4	8	12	14

$\boxed{b = 4}$

b) Louis dépose 5 $ par jour dans son compte de banque dans lequel il avait déjà 50 $.

$\boxed{b = 50\$}$

c)



$\boxed{b = -1}$

d) Une droite qui passe par le point (7,22) et dont le taux de variation est 6.

$y = 6x + b$

$22 = 6 \cdot 7 + b$

$22 = 42 + b$

$-42 \quad -42$

$-20 = b$

$\boxed{b = -20}$

La règle d'une droite

Comme nous l'avons vu précédemment, la règle (ou l'équation) d'une droite est de la forme : $y = ax + b$.

Tu dois donc déterminer le taux de variation (a) et l'ordonnée à l'origine (b).

Détermine la règle de la droite sachant qu'elle passe par les points (10, 40) et (20, 70)

Étapes lorsqu'on connaît deux couples

Étapes	Exemple
1. Trouver le taux de variation à partir de deux points $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(10, 40) (20, 70) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $a = \frac{70 - 40}{20 - 10}$ $a = \frac{30}{10}$ $\boxed{a = 3}$
2. Trouver la valeur de b. Dans la règle $y = ax + b$, remplacer a par le taux de variation et x et y par les coordonnées d'un point. Résoudre l'équation obtenue.	$y = 3x + b$ (10, 40) $40 = 3(10) + b$ $40 = 30 + b$ $-30 \quad -30$ $\boxed{10 = b}$
3. Écrire l'équation (la règle) avec les valeurs de a et de b trouvées aux étapes précédentes.	$y = 3x + 10$
4. Vérifier la règle trouvée à l'aide d'un couple ou de l'allure du graphique.	$y = 3x + 10$ (20, 70) $y = 3 \cdot 20 + 10$ $y = 70$ ok.

Étapes lorsqu'on connaît un couple et le taux de variation

On se pratique !

Détermine l'équation de la droite pour chacune des situations suivantes :

(a, b connus) a) Le taux de variation est -2 et la droite passe par le point (0,5)

$a = -2$

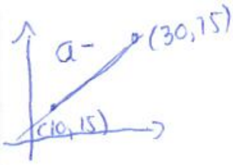
$b = 5$

$\boxed{y = -2x + 5}$

(rien connu) b) Une droite qui passe par les points (10, 15) et (30, 75)

(10, 15)

(30, 75)



1) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{75 - 15}{30 - 10}$

$a = \frac{60}{20}$

$\boxed{a = 3}$

2) $y = 3x + b$

$15 = 3(10) + b$

$15 = 30 + b$

$-30 \quad -30$

$\boxed{-15 = b}$

3) $\boxed{y = 3x - 15}$

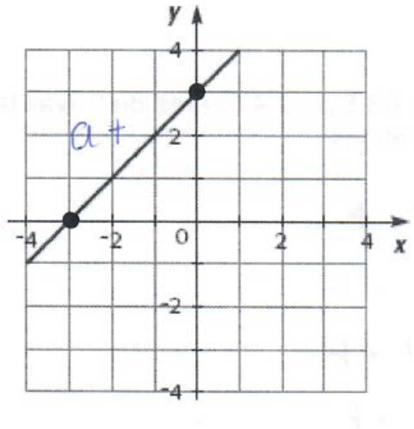
4) Valider

$y = 3 \cdot 30 - 15$

$y = 75$ ok.

Réponse : $\boxed{y = 3x - 15}$

(b, connu) c)



1) $b = 3$

2) (-3, 0)

(0, 3)

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{3 - 0}{0 - -3}$

$a = \frac{3}{3}$

$\boxed{a = 1}$

3) $\boxed{y = x + 3}$

où $y = ax + b$

$y = ax + 3$

$0 = a \cdot -3 + 3$

$-3 \qquad -3$

$\frac{-3}{(-3)} = \frac{a(-3)}{(-3)}$

$1 = a$

b connu

d)

x	0	4	6	7
y	12	20	24	26

1) $b = 12$

2) $(0, 12)$ $(4, 20)$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{20 - 12}{4 - 0}$

$a = \frac{8}{4}$

$a = 2$

3) $y = 2x + 12$

4) Valider

$y = 2 \cdot 4 + 12$

$y = 20$ ok.

Rep: $\boxed{y = 2x + 12}$

problème + (a, b connus)

e) Raphaël prend des cours de tennis. Il paye son entraîneur 18 $/h et a donné 30 $ pour son inscription.

1) variables

x = temps (h)

y = Coût total ($)

2) $a = 18$ $/h

$b = 30$ $

3) $\boxed{y = 18x + 30}$

problème

f) Pour réparer leurs ordinateurs Thomas a payé 63 $ pour 4 heures de travail tandis que Marie a déboursé 87 $ pour 6 heures de réparations.

1) x = temps (h)

y = Coût total ($)

2) 2 points (h, $)

$(4, 63)$ $(6, 87)$

3) Calcul t. v.

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{87 - 63}{6 - 4}$

$a = \frac{24}{2} = 12$ $/h

4) Calcul b

$y = 12x + b$

$63 = 12 \cdot 4 + b$

$63 = 48 + b$

$-48 \quad -48$

$25\$ = b$

Rép: $y = 12x + 25$

La recherche d'une valeur

Connaissant la règle d'une fonction, il est possible de trouver une valeur précise de la variable dépendante (y) à partir de la variable indépendante (x) et vice-versa.

Exemple : On remplit, avec un débit constant de 50 cm par minute, un bassin qui contenait déjà 2 cm. Quel sera le niveau de l'eau, en centimètres, après 3 minutes de remplissage ? Combien de temps faut-il pour que le niveau de l'eau soit à 202 cm ?

Étapes	Exemple
1) Identifier les variables	x = temps (min) y = hauteur de l'eau (cm)
2) Trouver la règle	a = 50 cm/min b = 2 cm $y = 50x + 2$
3) Résoudre	Quel sera le $\underbrace{\text{niveau}}_{y}$ après $\underbrace{\text{3 minutes}}_{x}$? y = ? si x = 3 $y = 50 \cdot 3 + 2$ $y = 152$ cm Rép: le niveau sera de 152 cm après 3 minutes Combien de $\underbrace{\text{temps}}_{x}$ pour que le $\underbrace{\text{niveau atteigne 202 cm}}_{y}$? x = ? si y = 202 $202 - 2 = 50x + 2 - 2$ $\frac{200}{50} = \frac{50x}{50}$ 4 min = x Rép: Après 4 minutes le niveau sera de 202 cm.

On se pratique !

1. En utilisant l'équation $y = -3x + 10$, trouve les valeurs demandées.

   a) Si $x = 4$, trouve la valeur de y.

   $y = -3 \cdot 4 + 10$

   $\boxed{y = -2}$

   Couple (4, -2) dans le plan cartesien.

   b) Si $y = 40$, trouve la valeur de x.

   $40 = -3x + 10$
   $-10 \qquad -10$
   $30 = -3x$

   $\frac{30}{-3} = \frac{-3x}{-3}$

   $\boxed{-10 = x}$

   Couple (-10, 40) dans le plan cartesien.

2. Soit une droite passant par les points (3, 4) et (4, 2)

   ① Regle

   $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

   $a = \frac{2-4}{4-3}$

   $a = \frac{-2}{1}$

   $a = -2$

   $y = -2x + b$
   $2 = -2(4) + b$
   $2 = -8 + b$
   $+8 \qquad +8$
   $10 = b$

   $y = -2x + 10$

   a) Détermine x = ? si y = 20

   $20 = -2x + 10$
   $-10 \qquad -10$
   $\frac{10}{-2} = \frac{-2x}{-2} \rightarrow \boxed{x = 5}$

   b) Détermine y = ? si x = -6

   $y = -2(-6) + 10$
   $y = 12 + 10$
   $\boxed{y = 22}$

3. Victor a payé 350 $ pour le travail effectué par un plombier en 5 heures. Anne, qui a fait appel au même plombier, a payé 784 $ pour 12 heures de travail. Pour le travail à effectuer chez Francine, le plombier a demandé un montant de 288 $. Combien d'heures a-t-il travaillé chez Francine ?

   1) x = temps (h)
   y = Coût total ($)

   2) (5, 350)
   (12, 784)

   3) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

   $a = \frac{784 - 350}{12 - 5}$

   $a = \frac{434}{7}$

   $\boxed{a = 62\ \$/h}$

   4) $y = 62x + b$
   $350 = 62 \cdot 5 + b$
   $350 = 310 + b$
   $-310 \qquad -310$
   $\boxed{40\$ = b}$

   $\boxed{y = 62x + 40}$

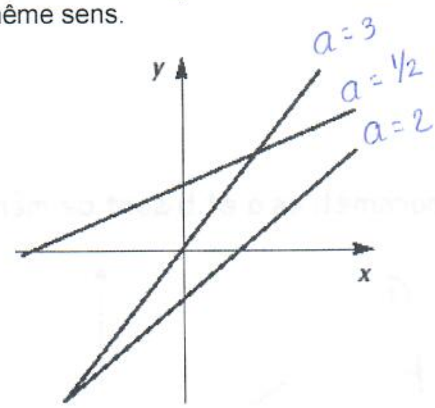
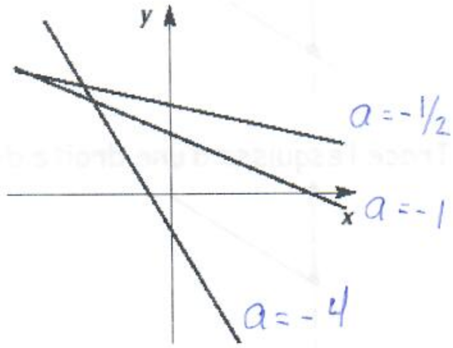
   5) x = ? si y = 288

   $288 = 62x + 40$
   $-40 \qquad -40$
   $\frac{248}{62} = \frac{62x}{62}$
   $4h = x$

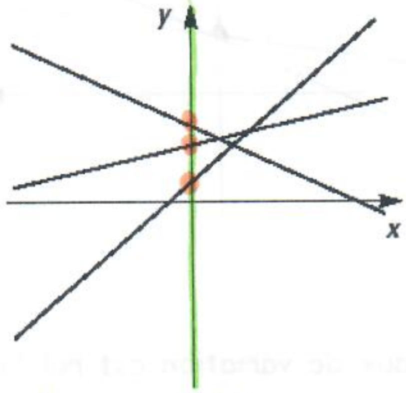
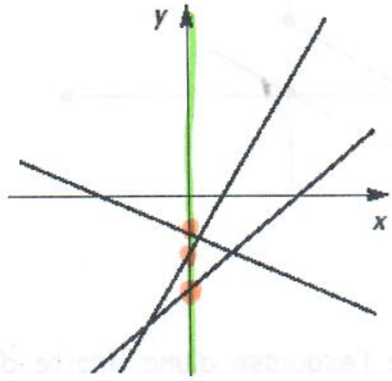
   Rép. Il a travaillé 4 heures chez Francine

Le rôle des paramètres a et b

Le tableau suivant présente l'effet du signe du taux de variation a sur le graphique d'une droite

a > 0	a < 0
Les valeurs associées des variables dépendante et indépendante varient dans le même sens.	Les valeurs associées des variables dépendante et indépendante varient dans le sens opposé.
	
Les droites sont crossantes	Les droites sont decroissant

Le tableau suivant présente l'effet du signe de la valeur initiale b sur le graphique d'une droite.

b > 0	b < 0
La droite rencontre l'axe des ordonnées au-dessus de l'axe des abscisses.	La droite rencontre l'axe des ordonnées au-dessous de l'axe des abscisses.
	
b positif	b negatif

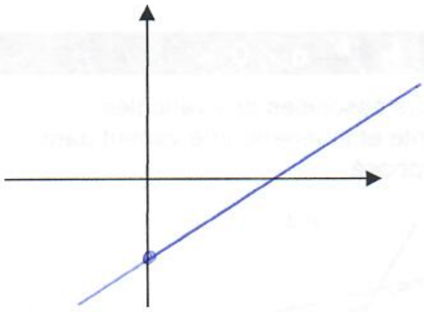
* Si 2 droites ont le même taux de variation (ex $y = 4x + 8$ et $y = 4x - 3$) alors elles ont la "même inclinaison" et elles sont parallèles.

On se pratique !

1. Trace l'esquisse d'une droite dont le taux de variation est positif et dont l'ordonnée à l'origine est négative.

a +

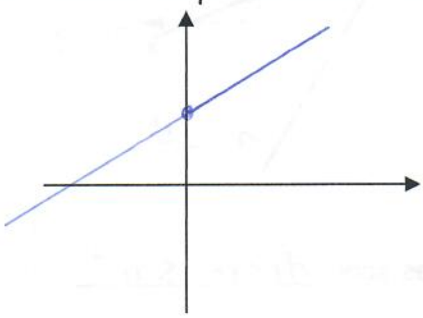
b -



2. Trace l'esquisse d'une droite dont les paramètres a et b sont de même signe.

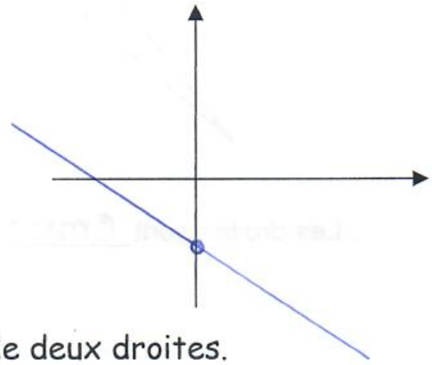
a +

b +



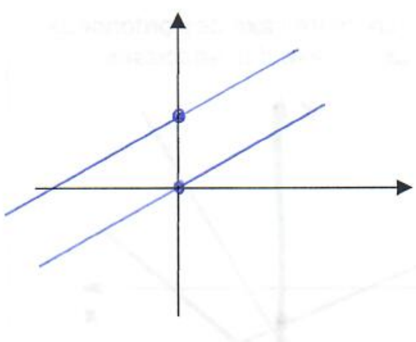
a -

b -

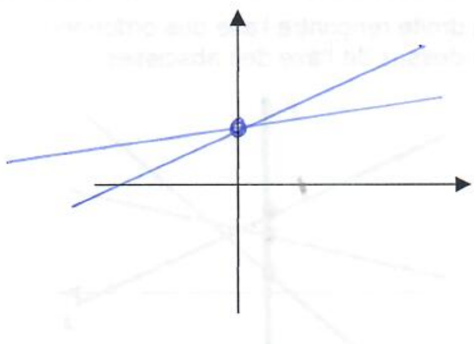


3. Dans un même plan cartésien, trace l'esquisse de deux droites.

Même taux de variation
Ordonnées à l'origine différentes



Taux de variation différents
Même ordonnée à l'origine



4. Trace l'esquisse d'une droite dont le taux de variation est nul ($a = 0$) et l'ordonnée à l'origine est négative.

a = 0

b -